

ANÁLISE COMBINATÓRIA: história para sala de aula

*Jorge Tavares de Souza Neto
Ana Paula Nascimento Pegado Couto
Miguel Chaquiam*

Introdução

A forma de ensinar matemática vem se tornando um assunto de extrema relevância dentro das salas de aula nos cursos de Licenciatura em Matemática, uma vez que a proposta é estimular os discentes a utilizarem as Tendências da Educação Matemática como metodologia a fim de otimizar suas aulas e tornarem mais dinâmica e produtivas, para sair do padrão de apresentação de conceitos e exercícios.

Uma das tendências bastante discutidas é a História da Matemática que, segundo Chaquiam (2016) nas últimas cinco décadas, esta tendência teve um desenvolvimento bastante crescente e que está constituindo um importante elemento para a melhoria do ensino-aprendizagem da matemática nas mais diversas áreas e níveis.

Para Chaquiam (2016) iniciar uma aula apresentando fatos do passado pode ser uma alternativa altamente produtiva para conduzir um determinado assunto matemático, uma vez que o aluno pode notar a matemática como uma construção humana que surgiu a partir da necessidade de solucionar problemas. O autor ainda soma com o seguinte argumento.

Neste sentido, os estudos apontam que a história da matemática, combinada com outros recursos didáticos e metodológicos, pode contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática, emerge como uma possibilidade de buscar uma nova forma de ver e entender a Matemática, tornando-a mais contextualizada, mais integrada com as outras disciplinas, mais agradável, mais criativa, mais humanizada. (CHAQUIAM, 2016, p. 2)

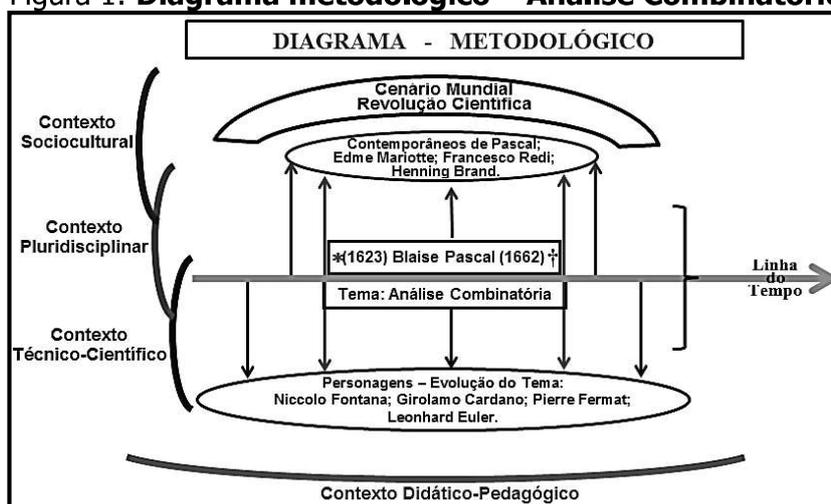
Este trabalho aborda a construção histórica do tema Análise Combinatória, conteúdo que, de certa forma, apresenta um índice de

rejeição considerável dentre os alunos e os próprios professores. No intuito de dinamizar as aulas deste conteúdo, surgiu o interesse de estudar mais sobre seu contexto histórico, e também para mesclar a história da matemática com a resolução de problemas.

Desta forma, este trabalho tem por objetivo apresentar um texto recorte da evolução histórica do tema Análise Combinatória para o uso em sala de aula na Educação Básica, com base no diagrama desenvolvido por Chaquiam (2016), com o intuito de contribuir com a produção de uma literatura adequada referente ao assunto.

Para tanto, executamos uma pesquisa bibliográfica, de cunho histórico, onde será apresentado o diagrama de base deste artigo, e terá foco as principais contribuições de Blaise Pascal (1623 – 1662) para a Análise Combinatória, este que será o personagem principal desta pesquisa. Tendo como público alvo discente do curso de licenciatura em matemática que buscam aprimorar seus conhecimentos acerca do tema. Para sala de aula, indicamos sua aplicação para alunos do segundo ano do ensino médio, uma vez que os mesmos iniciam seus estudos sobre Análise Combinatória. Desta maneira, segue o diagrama metodológico adaptado ao conteúdo de análise Combinatória:

Figura 1: **Diagrama metodológico – Análise Combinatória**



Fonte: Adaptado de Chaquiam (2016)

Este trabalho segue com a apresentação do cenário mundial com o intuito de nos situar nas contribuições de cada personagem que será apresentado e para nos auxiliar na localização do espaço acerca dos fatos que ocorriam.

Em seguida apresentaremos um pouco sobre os contemporâneos de Pascal, ou seja, aqueles que viveram no mesmo período e que contribuíram para os mais variados campos da ciência, não necessariamente ao tema proposto. Após este momento, apresentaremos aqueles personagens que tiveram contribuição ao tema, dando foco àquele que titulamos como personagem principal. Seguindo iremos apresentar alguns pontos de vista a respeito do personagem e do tema e finalizaremos com as considerações finais.

Cenário Mundial - A Revolução Científica

Para nos situar em tempo e espaço em torno do personagem principal eleito, neste caso Blaise Pascal (1623 – 1662), será apresentado a seguir o cenário mundial da época que compreende o século XVII.

O século XVII foi um período marcado por reformas no modo de pensar, em que a ciência passou a se desligar da filosofia e passou estar mais ligada aos conhecimentos práticos, estruturados e fundamentados. Este momento da história é conhecido como *Revolução Científica*, que compreende o período que vai de 1550 à 1770 aproximadamente, passando pelo século XVI, por todo o século XVII e parte do século XVIII, embora a expressão "revolução científica" tenha sido criada por Alexandre Koyré só em 1939. (RONAN, 1987)

O início da revolução científica foi marcado pela proposta de Nicolau Copérnico de que a Terra não é o centro do universo e que ela está em constante movimento, esta proposta é o que conhecemos hoje por modelo Heliocêntrico. O período foi marcado por severas mudanças, uma vez que a igreja católica ditava suas regras de acordo com seus conhecimentos religiosos. (RONAN, 1987)

Foi uma época em que a ciência ganhou bastante força, passou a ser mais vista e aceita para uma nova sociedade que estava nascendo. Por sua vez, a igreja católica perdia forças, já que movimentos a favor da revolução científica cresciam cada vez mais. (RONAN, 1987)

O século XVII para a matemática foi de grandes avanços. Segundo Bastos (2016) várias contribuições para a matemática surgiram, assim como a invenção da Geometria Analítica; do Cálculo; da Teoria das Probabilidades e novos campos da ciência. Para a Análise Combinatória, o século XVII foi fantástico, e isso foi possível graças a Teoria das Probabilidades.

Foram vários os efeitos que a revolução científica casou no cenário histórico da humanidade, dentre eles, o marco inicial dessa revolução que foi a criação do modelo Heliocêntrico. A matemática por sua vez obteve muitos nomes que contribuíram para o seu avanço neste período, segundo Boyer (1974), *as figuras principais foram René Descartes (1596 – 1650) e Pierre de Fermat (1601 – 1665), mas três outros franceses contemporâneos também fizeram contribuições importantes, Gilles Personne de Roberval (1602 – 1675), Girard Desargues (1591 – 1661) e Blaise Pascal (1623 – 1662)*. Este último sendo escolhido como personagem principal desta pesquisa.

Contemporâneos de Blaise Pascal

Como já mencionado anteriormente, foi escolhido como personagem principal Blaise Pascal (1623 – 1662), devido seus grandes feitos para a Análise Combinatória, no entanto, para que uma melhor compreensão dos fatos, serão mostrados outros personagens que viveram no mesmo período que Pascal, que são Edme Mariotte (1620 – 1684), Francesco Redi (1626 – 1697) e Henning Brand (1630 – 1710), de acordo com a ordem elencada.

Edme Mariotte nasceu em Borgogne, em 1620 e viveu até 1684, foi um físico e hidráulico, deu início aos estudos da física experimental na

Europa, escreveu sobre todas as fases da hidráulica, trabalhou sobre mecânica dos sólidos e dos fluidos, ótica, cores, previsão do tempo, entre outras coisas. Foi o descobridor da chamada lei de Mariotte em 1676 que relaciona o volume com pressão dos gases, estabeleceu também uma lei sobre a deformação elástica dos sólidos. Foi membro da academia Royal de Sciences, fundada em Paris (1666) e tem como principal obra *Traité Du Mouvement Des Eaux Et Des Autres Corps Fluides* (1686) que foi publicada dois anos após sua morte. (Brasil Escola - bibliografias)

Francesco Redi nasceu no dia 18 de fevereiro de 1626 e viveu até o dia 1 de março de 1697, foi o primeiro cientista a provar que a geração espontânea não era a responsável pela criação de novas vidas. Nasceu em Arezzo, na Itália e adquiriu diploma de médico e filósofo pela Universidade de Pisa. (Portal São Francisco – bibliografia)

Responsável pela criação da teoria da Abiogénese, em um de seus experimentos que causou maior abalo na teoria da geração espontânea, Redi colocou pedaços de carne em frascos, deixou alguns abertos e outros fechados por uma tela, percebeu que o material em decomposição atraía moscas que entravam e saíam dos frascos. Tempos depois notou o surgimento de vermes nos frascos que estavam abertos, já nos estavam isolados pela tela, as moscas não entraram em contato com a carne em decomposição e por consequência não havia vermes. (Portal São Francisco – bibliografia)

Hanning Brand viveu no período de 1630 a 1710. Brand foi o químico responsável pela descoberta do elemento químico fósforo em 1669 na tentativa de descobrir outro elemento. (WHITTEN, 2004, tradução Chemello)

Esta descoberta foi realizada graças da tentativa de produzir ouro a partir da urina que, em 1669 reuniu 50 galões de urina em seu porão e adicionou alguns produtos químicos, após realizar os devidos processos para a produção, Brand observou uma substância que brilhava no escuro. Sua descoberta foi mantida em segredo durante anos até que em 1675 Brand mostrou o material produzido aos seus amigos. Para fins financeiros, Brand começou a comercializar parte do seu material. (WHITTEN, 2004, tradução Chemello)

Traços bibliográficos de Blaise Pascal

Blaise Pascal (1623 – 1662), matemático e filósofo francês, lançou as bases para a moderna teoria das probabilidades e formulou o que veio a ficar conhecido como o princípio de Pascal. Nascido na província francesa em 19 de junho de 1623, filho de Etienne Pascal (1588 – 1651) e Antoniette Begon. (Ribeiro, 2014)

Figura 2: **Blaise Pascal**



Fonte: Revista de Ciência Elementar, 2014.

Desde os primeiros anos de vida, Pascal já demonstrava uma extraordinária inteligência, no entanto, não tinha acesso aos livros de matemática para que pudesse despertar interesses em outras áreas. De acordo com Boyer (1974, p.264), *dizem que a principio ele não deu livros de matemática à seu filho Blaiser para encorajá-lo a desenvolver outros interesses, mas aos doze anos o menino mostrou tal talento geométrico que a partir daí sua inclinação foi encorajada.*

Aos quatorze anos Pascal, com seu pai, participou das reuniões informais da Academia de Mersenne em Paris. Em 1640, com dezesseis anos, escreveu um ensaio sobre secções cônicas (*Essay pour les coniques*) baseado na obra de Gérard Desargues (1591 – 1661) sobre geometria projetiva sintética. O trabalho de Pascal foi bem recebido no mundo da

matemática, tendo despertado o interesse do grande racionalista e matemático francês René Descartes. (Ribeiro, 2014)

Pascal realizou feitos extraordinários para o campo da matemática, aos dezoito anos de idade, o jovem inventou uma máquina de calcular e nos anos seguintes ele construiu e vendeu umas cinquenta máquinas. (Boyer, 1974)

Na física, Pascal contribuiu com seus estudos para a hidrostática onde desenvolveu grandes estudos, inventou a seringa e criou a prensa hidráulica, instrumento que se baseia em um princípio que ficou conhecido como Princípio de Pascal: a pressão no seio de um fluido em equilíbrio transmite-se a todos os pontos do líquido e às paredes do recipiente. (Ribeiro, 2014)

Por volta dos vinte anos de idade era detentor de um grande cabedal científico e muito respeitado na comunidade. A partir de 1647, Pascal passou a se dedicar aos estudos da aritmética, foi quando desenvolveu o cálculo da probabilidade, o triângulo de Pascal entre outros feitos. Os últimos anos de sua vida foram marcados pelos tormentos físicos e rodeados de preocupações espirituais. Morreu em 19 de agosto de 1662, com trinta e nove anos de idade na casa de sua irmã, deixando para a humanidade alguns dos mais importantes conhecimentos que impulsionaram grandes estudos futuros.

Evolução dos conteúdos referentes a análise combinatória

Para uma melhor formação de ideia e compreensão desta evolução, será apresentada de forma cronológica a construção da Análise Combinatória seguindo com os contribuintes Niccolo Fontane (1499 – 1557), Girolamo Cardano (1501 – 1576), Pierre Fermat (1601 – 1665) e Leonhard Euler (1707 – 1783). Destacamos que os fatos históricos aqui descritos foram baseados principalmente em Boyer (1974) e Eves (2004).

Niccolo Fontana Tartaglia nasceu em Brescia no ano de 1499, e morreu em 1557 em Veneza. Seu apelido, Tartaglia (que significa "gago"), tem uma história curiosa, quando criança tinha recebido um corte de sabre,

na tomada de Brésia pelos franceses em 1512, e isso lhe prejudicou a fala. Por esse fato é que recebeu o apelido de Tartaglia, ou gago, nome que usou em lugar do que recebera ao nascer. Foi um matemático italiano, cujo nome está ligado à tabela triangular mais conhecida como "Triângulo de Pascal" (Matemática na Veia - biografias)

Tartaglia era autodidata, aprendeu a ler e escrever sozinho e tornou-se professor de ciências e matemática. É atribuído à ele o mérito de ter sido o primeiro a usar matemática na ciência dos tiros de artilharia, e o desenvolvimento do primeiro método geral para resolver equações cúbicas. Escreveu também o que se considera a melhor aritmética do século XVI, um tratado em dois volumes que inclui uma discussão ampla das operações numéricas e da aritmética mercantil de seu tempo.

Sua principal contribuição para a Análise Combinatória foi o que ficou denominado de Triângulo de Tartaglia e em algumas páginas do seu livro *General Trattato* dedicou-se a solucionar os problemas de Pacioli (1500). (Matemática na Veia - biografias)

Girolamo Cardano nasceu em Roma no início do século XVI, no ano de 1501 e viveu até o ano de 1576. Era médico por profissão; dedicou-se à matemática; deu aulas de astronomia, geometria e alquimia, e neste mesmo período iniciou sua vida nos jogos de azar, onde despertou o interesse em estudar as possibilidades de vencer em suas apostas. Segundo Bastos (2016) Cardano *deixou vários livros escritos, entre eles o De Ludo Aleae (sobre os jogos de azar), publicado em 1663, o livro expõe conselhos sobre os jogos ou um manual do jogador; e De Ratiociniss in Ludo Alaea, as primeiras noções de probabilidade.*

Ao analisar cada uma de suas jogadas, Cardano passou a estudar a aleatoriedade dos jogos e, juntamente a isso, escreveu um tratado no qual fala da sistematização dos dados, das possibilidades dos pontos combinados entre outros casos (Tomaz, 2011, p. 3). Além disso, Cardano foi o primeiro a utilizar as técnicas de combinatória para determinar a quantidade de casos favoráveis em um determinado evento aleatório para que assim pudesse calcular a probabilidade de ocorrência. Ele ficou limitado em resolver problemas concretos, em outras palavras, problemas

que possuíam dados estritamente numéricos, no entanto, não produziu nenhum teorema.

Antes dos estudos de Cardano, há registros de estudos sobre a teoria da aleatoriedade, segundo Tomaz (2011):

Outros matemáticos, como Pacioli, Tartaglia e Galileu, também estudaram a aleatoriedade de certos eventos, porém, todos eles, assim como Cardano, se limitaram a resolver problemas concretos, estritamente numéricos. Para alguns estudiosos da história da matemática, a teoria da probabilidade só começou a existir, de fato, após os estudos de Pascal e Fermat. Porém é de grande valia ressaltar que tanto os estudos de Fermat quanto os estudos de Pascal estavam baseados nos estudos de Cardano.

(TOMAZ, 2011, p. 5)

Além de Pascal e Fermat, outros matemáticos também deram suas contribuições para a Teoria das Probabilidades. Essa teoria de acordo com os estudos de Tavares e Brito (2005) foi um terreno fértil para o desenvolvimento de Novas técnicas de Análise Combinatória.

Pierre Fermat nasceu em 17 de agosto de 1601, e morreu em 12 de janeiro 1665. Era filho de um comerciante de couro e recebeu sua educação inicial em casa. Em 1631 entrou para o serviço público onde foi nomeado conselheiro na câmara de requerimentos. Acredita-se que o interesse de Fermat pela matemática originou-se, possivelmente, de uma leitura da Aritmética de Diofanto de Alexandria (1621).

Fermat teve uma influência bastante limitada, uma vez que não tinha interesse em publicar suas descobertas, mas que ficaram conhecidas, principalmente pelas correspondências que trocava com muitos dos principais matemáticos de seu tempo e, dessa maneira, exerceu considerável influência sobre seus contemporâneos.

Contribuindo para os estudos da Análise Combinatória e para o seu uso, em 1654 Fermat troca correspondências com Pascal sobre o problema dos pontos. Foi esse trabalho que lançou as bases da Teoria matemática das probabilidades. Em 1657, Christiann Huygens (1629 – 1695) escreveu

o primeiro tratado formal sobre o assunto, embasado na correspondência Pascal-Fermat.

Blaise Pascal (1623 – 1662) contribuiu para o desenvolvimento da Análise Combinatória com o aperfeiçoamento do triângulo de Tartaglia, que logo mais ficou conhecido como Triângulo de Pascal, forma conhecida no Brasil e vários outros países. Embora haja indícios históricos de que os chineses teriam conhecimento desta técnica, mas foi Pascal quem aprimorou as propriedades do triângulo.

Como mencionado anteriormente, Cardano escreveu um breve manual do jogador que envolvia alguns aspectos da probabilidade matemática. Mas em geral, se concorda que a questão a qual está ligada a origem da ciência da probabilidade o *problema dos pontos*. Esta questão enunciava o seguinte: suponha que duas pessoas estão participando de um jogo, com lançamento de dados, em que ambos têm a mesma chance de vencer, e o vencedor é quem atingir uma determinada quantidade de pontos. Porém, o jogo é interrompido quando um dos jogadores está na liderança. Qual é a maneira mais justa de dividir o dinheiro apostado? (BOYER, 1974; EVES 2004)

Pacioli foi um dos primeiros autores a introduzir o problema dos pontos em um trabalho matemático. O problema foi também discutido por Cardano e Tartaglia. Mas só se verificou um avanço efetivo quando, 1654, o Chavalier de Meré, um hábil e experiente jogador o propôs à Pascal.

Pascal ficou intrigado com as questões e começou a se corresponder com Fermat para que os dois chegassem a uma solução. Para alguns matemáticos foi essa correspondência entre os dois que realmente deu início à teoria da probabilidade. Nas correspondências ficou evidente que tanto Fermat quanto Pascal resolveram corretamente as questões, porém de maneiras diferentes. Fermat aperfeiçoou a regra geral de Cardano, baseando o cálculo de probabilidades no cálculo combinatório e Pascal ligou o estudo das probabilidades ao triângulo aritmético, que hoje é conhecido como o triângulo de Pascal. O triângulo aritmético já existia há mais de 600 anos, mas recebeu esse nome porque Pascal descobriu novas propriedades para ele (BOYER, 1974)

Desde então, Pascal, juntamente com Fermat foram os primeiros a resolverem os problemas da teoria das probabilidades de forma genérica, e não numérica, como era feita por Cardano.

Para resolver problemas de probabilidade, que eram necessários para obter o número de combinações de n elementos tomados r de cada vez (ou r a r), ele expressava verbalmente e corretamente afirmava como obter. Fazendo uso do simbolismo moderno, Pascal afirmava que:

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Onde o símbolo $n!$ (leia: fatorial de n), introduzido pela primeira vez em 1808, pelo professor Cristian Kramp (1760 – 1820) de Estrasburgo, França, cuja a expressão era simplificar a escrita. (Bastos, 2016)

Leonhard Euler (1707 – 1783) nasceu na Basileia, Suíça. Seu pai um pastor calvinista, com certa vocação para matemática, ensinou-lhe os fundamentos da matemática e conseguiu que o filho viesse a estudar com Johann Bernoulli (irmão de Jacque Bernoulli) Euler estudou quase todos os ramos da matemática pura e aplicada. Não é exagero dizer que, quase toda a língua e notação usada hoje na matemática, principalmente à nível universitário, devemos a ele. (Bastos, 2016)

Em Combinatória, Euler contribuiu com a notação dos coeficientes binomiais $\left[\begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right]$ para representar a expressão $\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{1.2\dots n}$

que equivale a $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ porém a notação $\left[\begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right]$, modernamente é $\binom{n}{p}$

(leia: n sobre p).

Outros olhares sobre a temática

Neste tópico será apresentado um ponto de vista a respeito do tema proposto voltado a atual forma de ensino do assunto em questão. No decorrer da pesquisa constatou-se que o avanço do uso da Análise Combinatória vem se dando a partir da tentativa de solucionar problemas.

Com o passar do tempo, a forma de ensinar Análise Combinatória veio perdendo foco, as aulas passaram a ser estritamente expositivas onde os alunos são submetidos a decorarem fórmulas complexas que possam aplica-las a problemas propostos.

Esta situação causa um forte desconforto sobre o assunto tanto por parte dos alunos quanto por parte dos professores, e é conseqüente a isto, que uso da resolução de problemas torna-se mais vantajoso, uma vez que os alunos serão estimulados a buscarem por respostas, assim como personagens aqui destacados buscaram solucionar os problemas propostos.

Pinheiro (2008) propõe um ensino de Análise Combinatória voltado para a metodologia da Resolução de Problemas, no qual, inicialmente, o aluno é submetido a um problema e que o mesmo deverá buscar possíveis soluções para tal. O autor ainda contribui dizendo que o uso de situações-problema exige que o aluno tenha total envolvimento com o conhecimento que ele pretende alcançar e, dessa forma, uma única situação-problema não possibilitaria a construção do referido conceito.

Deste modo, é possível voltar a despertar o interesse dos jovens em buscar soluções para eventuais problemas propostos, uma vez que, de acordo com a pesquisa bibliográfica, de cunho histórico, podemos notar que o que levou ao desenvolvimento da Análise Combinatória foi a resolução de problemas.

Considerações Finais

Analisando o que foi apresentado neste artigo e com base nos textos de Chaquiam (2015) e Chaquiam (2016), é possível produzir um texto – diagrama com o tema apresentado para o uso em sala de aula a fim de contribuir para um melhor aproveitamento do ensino-aprendizagem.

Nesta pesquisa observou-se uma carência de registros históricos no campo acadêmico sobre a construção e a utilização da análise combinatória, o que dificulta a elaboração de um texto rico em detalhes sobre a contribuição de cada personagem mencionado. Muitas coisas são

encontradas em sites livres pela internet, porém devemos ter muita atenção nas informações que retiramos, uma vez que algumas delas não possuem nenhuma referência para validar os fatos.

Após as pesquisas feitas para a elaboração deste trabalho, podemos notar uma forte ligação entre o conteúdo da Análise Combinatória e da Probabilidade, o que me trouxe um enriquecimento para os meus conhecimentos acerca dos assuntos mencionados. Deste modo, sugerimos que o texto seja usado por discentes do curso de licenciatura em matemática que estão em busca de aprimoramentos para suas aulas, para que possam utilizar essas informações como ponto de partida para iniciar suas aulas sobre Análise Combinatória, eliminando assim o uso de uma aula expositiva.

Referências

BRASIL ESCOLA – **Edme Mariotte**. Disponível em: <<http://brasilecola.uol.com.br>>. Acesso em 15 de junho de 2017.

BASTOS, Antônio Carlos. **Resolução de Problemas**: uma discussão sobre o ensino de análise combinatória. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências na Educação Básica) - Universidade do Grande Rio: Duque de Caxias, 2016.

BOYER, Carl b.; **História da Matemática**. 2 ed. São Paulo: Blucher, 1974.

CHAQUIAM, M. **História da Matemática em sala de aula**: uma proposta para integração aos conteúdos matemáticos. / XI SNHM. 2015.

EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

GASPARETTO JUNIOR, Antonio. **Revolução Científica**. Disponível em: <<http://www.infoescola.com/historia/revolucao-cientifica>>. Acesso em 15 de junho de 2017.

CHAQUIAM, Miguel. Um diagrama, um texto. In: MENDES, Iran Abreu;

CHAQUIAM, Miguel. **História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores**. Belém: SBHMat, 2016.

PINHEIRO, C. A. M. **O Ensino de Análise Combinatória a partir de situações-problema**/ 2008. 164f. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade do Estado do Pará, Belém, 2008.

PORTAL SÃO FRANCISCO – **Francesco Redi**. Disponível em: <<http://www.portalsaofrancisco.com.br/biografias/francesco-redi>>. Acesso em 15 de junho de 2017.

RIBEIRO, Daniel. **Blaise Pascal**. Revista de Ciência Elementar. Vol. 2, nº4. 2014.

RONAN, Colin A.. **História Ilustrada da Ciência**. São Paulo: Círculo do Livro, 1987.

TOMAZ, Priscilla Steffani Santos. **Gerolamo Cardano**: Pai da Teoria das Probabilidades ou Um Bom Apostador de Jogos de Azar?. ANAIS do IX SNHM. 2011.

WHITTEN, K. W., DAVIS, R. E., PECK, L. M. General Chemistry; with qualitative analysis. 7ª ed. Belmont, Brooks/Cole, 2004, p. 128. Tradução: Prof. Emiliano Chemello

Matemática na Veia – **Niccolo Fontana**. Disponível em: <<http://matematica-na-veia.blogspot.com.br>> acessado em: 14 de junho de 2017.