Curso: Licenciatura em Matemática
Módulo: IV
Unidade curricular: Atividade de Extensão IV
Professora: Vanessa Soares Sandrini Garcia
Data: 04/11/2022
Estudante: Darwin André Vier

Trigonometria

Assuntos a serem abordados:

- **A origem da Trigonometria;**
- **A ideia central da Trigonometria;**
- **O triângulo fundamental;**
- **Seno, cosseno e tangente;**
- **Ângulos notáveis e o Teorema de Pitágoras.**

A origem da Trigonometria

O termo Trigonometria (do grego trígónon, que significa triângulo, e métron, que significa medida) foi criado em 1595 pelo matemático Bartholomeus Pitiscus para designar o ramo da Matemática que estuda as relações entre as medidas dos lados e as medidas dos ângulos de um triângulo, mas a origem desse campo de estudo é muito mais antiga.

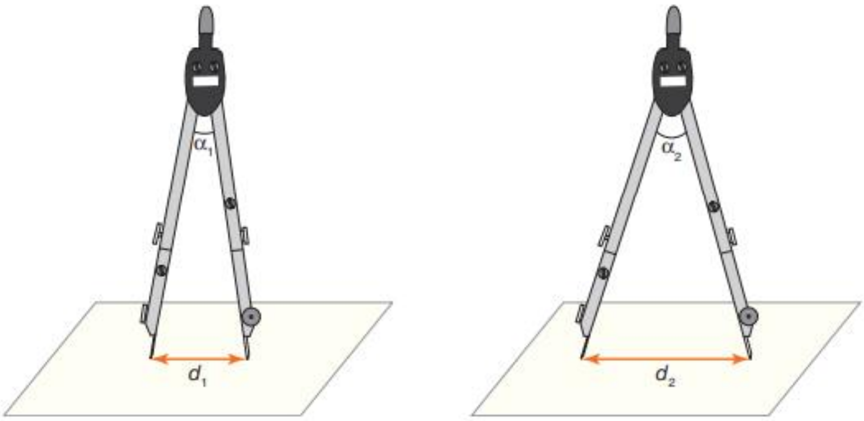
O papiro Rhind, escrito no Egito por volta de 1650 a.C., apresenta um texto matemático com 85 problemas, sendo o de número 56 um dos mais antigos registros conhecidos sobre Trigonometria. Esse problema trata da construção de pirâmides, tipo de construção em que era essencial manter a mesma inclinação nas faces — requisito que levou os construtores a manter constantes as razões entre as medidas dos lados dos triângulos retângulos, cujos catetos eram determinados pela sobreposição de blocos de pedra. Atualmente, essas razões entre os lados de um triângulo retângulo são chamadas de razões trigonométricas.

Como pode-se observar, podemos identificar alguns triângulos no papiro o que demostra um dos primeiros sinais da observação dos cálculos trigonométricos.

A ideia central da Trigonometria

As figuras abaixo mostram o mesmo compasso com duas aberturas diferentes. Cada medida α do ângulo formado pelas hastes determina uma distância d entre as pontas do compasso. Que relação numérica podemos estabelecer entre a medida α e a distância d?

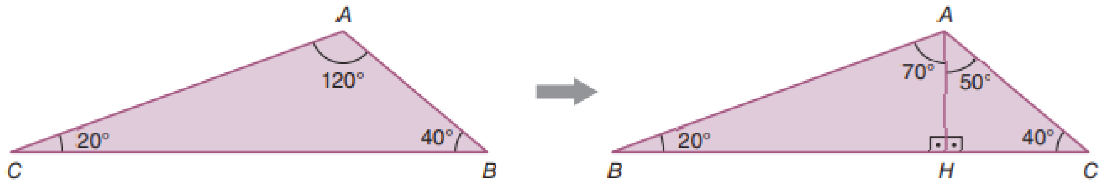
Essa situação apresenta um dos objetivos do estudo da Trigonometria, que é estabelecer relações entre as medidas dos ângulos internos e as medidas dos lados de um triângulo. Essas relações permitem, entre outras aplicações, o cálculo indireto de distâncias, como a distância entre a Terra e o Sol.



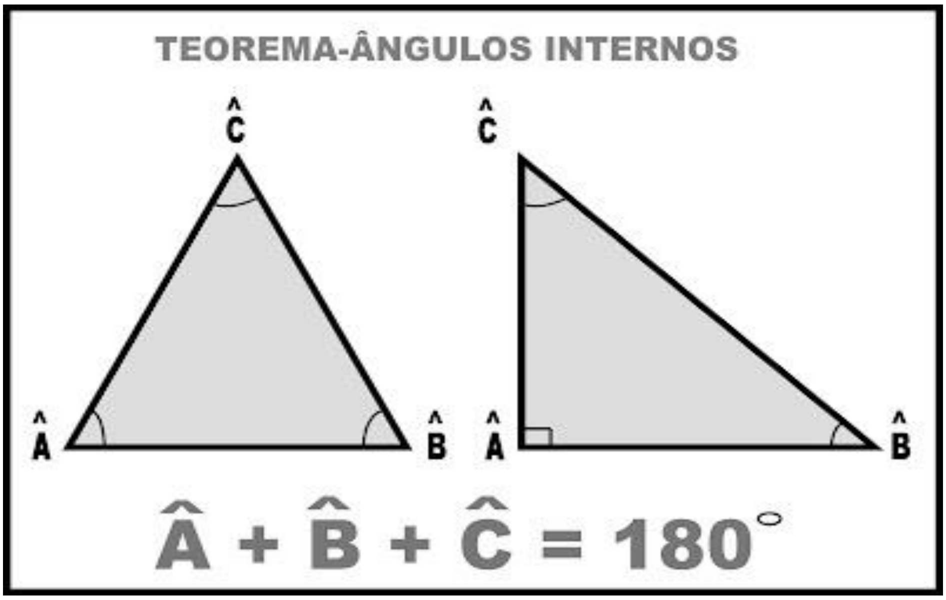
O triângulo fundamental

Podemos observar nas figuras abaixo que qualquer triângulo pode ser separado, por uma de suas alturas, em dois triângulos retângulos:

Por exemplo:

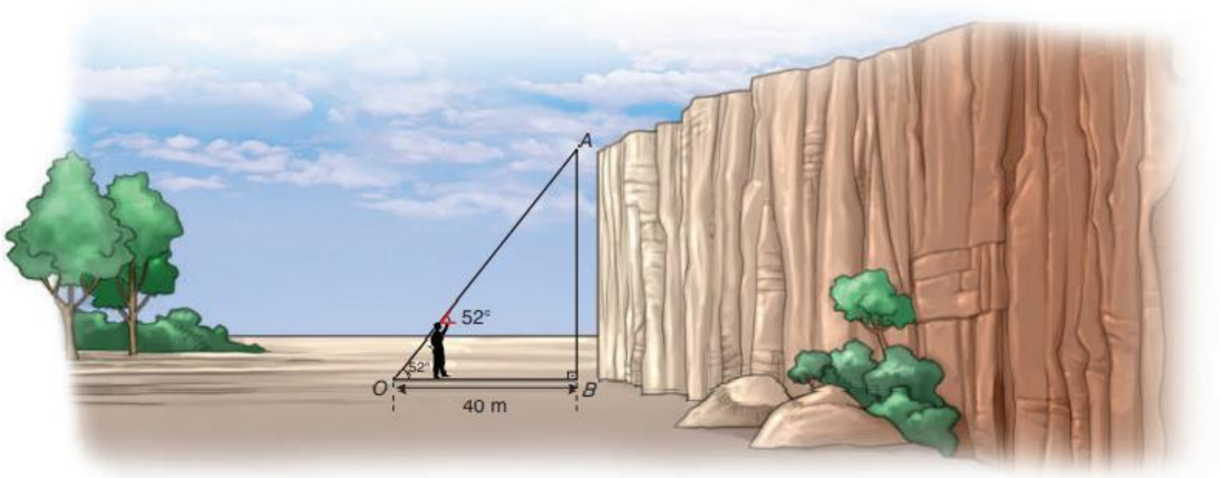


Atenção:

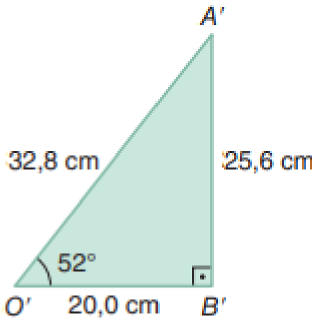


Seno, cosseno e tangente

Para medir a altura AB de uma encosta vertical, cuja base está em um terreno plano e horizontal, um topógrafo fixou um ponto O do terreno, conforme o esquema abaixo, e mediu o ângulo AOB e a distância OB, obtendo 52º e 40 m, respectivamente.



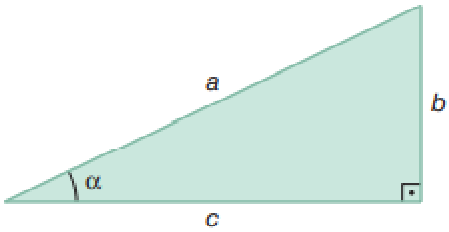
A seguir, o topógrafo desenhou um triângulo O`A`B` qualquer, retângulo em B` e com o ângulo agudo A`ÔB` e medindo 52º. Então, com uma régua graduada, mediu os lados desse triângulo, obtendo os valores indicados a seguir:



Como os triângulos AOB e A`O`B` são semelhantes (pelo caso AA), seus lados correspondentes são proporcionais. Assim, o topógrafo calculou a altura h da encosta pela proporção a seguir, em que 40 m foi substituído por 4.000 cm:

$$\frac{h}{25,6} = \frac{4.000}{20} \Rightarrow h = 5.120 \text{ cm}$$

Dessa forma, ele descobriu que a encosta tinha 5.120 cm de altura, ou 51,20 m. A ideia de relacionar as medidas dos lados com as medidas dos ângulos internos de triângulos retângulos por meio da semelhança de triângulos, levou alguns matemáticos a construir tabelas com as razões entre as medidas dos lados dos triângulos retângulos para várias medidas a de ângulos agudos, como os da tabela abaixo. Note que se o topógrafo tivesse a seu dispor essa tabela, não precisaria desenhar o triângulo semelhante ao triângulo AOB.



α	$\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$	$\frac{b}{c}$
40°	0,642788	0,766044	0,839010
41°	0,656059	0,754710	0,869287
42°	0,669131	0,743145	0,900404
43°	0,681998	0,731354	0,932515
44°	0,694658	0,719340	0,965689
45°	0,707107	0,707107	1,000000
46°	0,719340	0,694658	1,035530
47°	0,731354	0,681998	1,072369
48°	0,743145	0,669131	1,110613
49°	0,754710	0,656059	1,150368
50°	0,766044	0,642788	1,191754
51°	0,777146	0,629320	1,234897
52°	0,788011	0,615661	1,279942

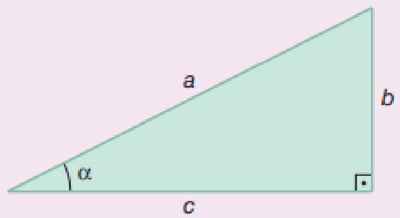
Atualmente, as tabelas das razões trigonométricas são substituídas pelas calculadoras eletrônicas. Para facilitar a identificação dessas razões, chamadas de razões trigonométricas, foi adotada a seguinte nomenclatura:

- ✓ a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de medida a e a medida da hipotenusa foi chamada de **seno de α**;
- ✓ a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo de medida a e a medida da hipotenusa foi chamada de **cosseno de α**;
- ✓ a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de medida α e a medida do cateto adjacente a α foi chamada de **tangente de α.**

Usamos **sen α, cos α e tg α** para abreviar seno, cosseno e tangente de α, respectivamente.

Resumindo o raciocínio temos a seguinte figura explicativa:

Sendo α a medida de um ângulo agudo em um triângulo retângulo qualquer, temos:



$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

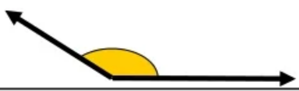
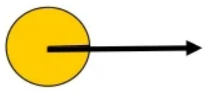
$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \frac{b}{c}$$

Quando dizemos “cateto oposto a α”, estamos nos referindo ao “cateto oposto ao ângulo de medida α”. Isso também vale para o cateto adjacente.

Relembrando:

Tipos de Ângulos

Os ângulos são classificados conforme suas medidas:

Classificação	Medida	Representação
Agudo	Menor que 90°.	
Reto	Igual a 90°.	
Obtuso	Maior que 90°.	
Meia Volta	Igual a 180°.	
Volta Inteira	Igual a 360°.	

Vamos lembrar o conceito de ângulos complementares.

- Dois ângulos agudos de medidas α e β são complementares se, e somente se, $\alpha + \beta = 90^\circ$.

- Dizemos também que as medidas α e β são complementares.

Vamos relacionar o seno e o cosseno de dois ângulos complementares por meio do seguinte teorema:

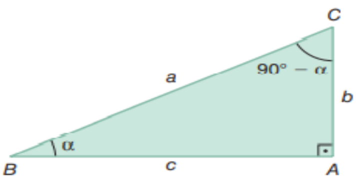
> Se α é a medida em grau de um ângulo agudo, então:
> - $\text{sen } \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$
> - $\cos \alpha = \text{sen }(90^\circ - \alpha)$

Demonstração

Construímos um ângulo agudo de medida α e traçamos uma perpendicular a um dos lados do ângulo, obtendo o triângulo retângulo com lados de medidas a, b e c, conforme a figura:

Observe que o ângulo $\hat{C}$ é o complementar do ângulo $\hat{B}$, pois:

$$\alpha + m(\hat{C}) = 90^\circ \Rightarrow m(\hat{C}) = 90^\circ - \alpha$$



Assim:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } \alpha = \dfrac{b}{a} \\ \cos(90^\circ - \alpha) = \dfrac{b}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos \alpha = \dfrac{c}{a} \\ \text{sen }(90^\circ - \alpha) = \dfrac{c}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos \alpha = \text{sen }(90^\circ - \alpha)$$

Desse modo, provamos que:

> Se dois ângulos agudos são complementares, então o seno de um deles é igual ao cosseno do outro.

Exemplos

a) 30° é o complemento de 60°; logo, sen 30° = cos 60° e sen 60° = cos 30°.

b) 12° é o complemento de 78°; logo, sen 12° = cos 78° e sen 78° = cos 12°.

Ângulos notáveis e o teorema de Pitágoras

Para estudos posteriores de Trigonometria, convém conhecer o seno, o cosseno e a tangente de alguns ângulos. Escolhemos, pela facilidade das demonstrações, os ângulos de medidas 30º, 45º e 60º, que chamaremos de **ângulos notáveis**.

Ângulo de 45º:

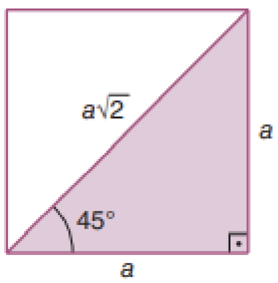
Considerando medida de cada diagonal de um quadrado de lado a é $a\sqrt{2}$, e cada ângulo interno do quadrado é dividido por uma diagonal em dois ângulos de 45º.

Assim, temos:

$$\text{sen } 45° = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

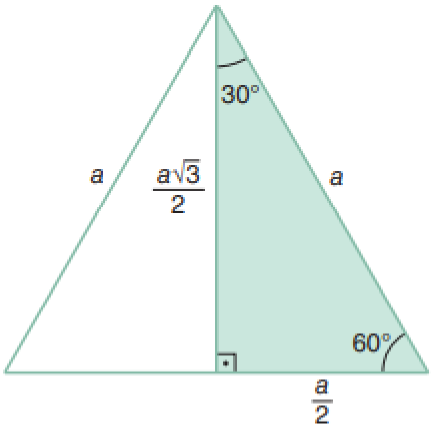
$$\cos 45° = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45° = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}} = 1$$



Ângulos de 30º e 60º:

Considerando cada altura de um triângulo equilátero de lado a é $(a\sqrt{3}) \div 2$. Temos que cada altura desse tipo de triângulo também é bissetriz interna e mediana.



Como cada ângulo interno do triângulo equilátero mede 60°, temos:

$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{\cancel{a}}{2}}{\cancel{a}} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{\frac{\cancel{a}\sqrt{3}}{2}}{\cancel{a}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{tg } 30° = \frac{\frac{\cancel{a}}{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{a}\sqrt{3}}{\cancel{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Temos, ainda, que 60° é o complemento de 30°. Logo:

$$\text{sen } 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2} \qquad \text{tg } 60° = \frac{\text{sen } 60°}{\cos 60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} = \sqrt{3}$$

Tabela trigonométrica dos ângulos notáveis:

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Dado um dos valores de sen α, cos α ou tg α, em que a é a medida de um ângulo agudo, é possível determinar os outros dois valores com o auxílio do teorema de Pitágoras, conforme veremos nos exercícios resolvidos a seguir:

Sabendo que α é a medida de um ângulo agudo e que $\text{sen } \alpha = \frac{4}{5}$, calcular cos α e tg α.

Resolução

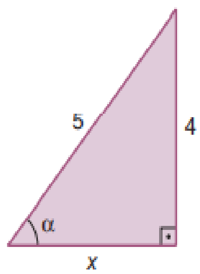
Se α é a medida de um ângulo agudo e $\text{sen } \alpha = \frac{4}{5}$, então existe um triângulo retângulo com um ângulo agudo de medida α tal que o cateto oposto a esse ângulo mede 4 e a hipotenusa mede 5, conforme a figura ao lado.

Pelo teorema de Pitágoras, podemos calcular a medida x do cateto adjacente a α:

$$x^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow x = 3$$

Assim, concluímos:

$$\cos \alpha = \frac{x}{5} = \frac{3}{5} \text{ e } \text{tg } \alpha = \frac{4}{x} = \frac{4}{3}$$

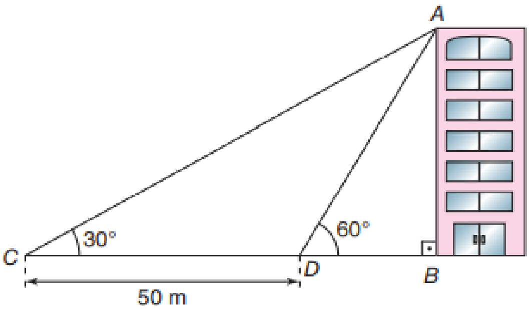


EXERCÍCIO RESOLVIDO

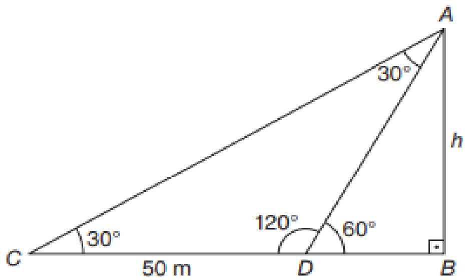
A base de um edifício está localizada em um terreno plano e horizontal. Para medir a altura desse edifício, um engenheiro fixou-se em um ponto do terreno e mirou o topo do prédio sob um ângulo de 30° com o solo. Depois, andou 50 metros em direção ao prédio e mirou novamente seu topo, mas, agora, sob um ângulo de 60°. Desconsiderando a altura do engenheiro, calcular a altura do edifício.

Resolução

Primeiro, vamos fazer um esquema da situação:



Indicando por h a altura do edifício, calculamos as medidas dos ângulos internos do triângulo ACD:



O triângulo ACD é isósceles, pois tem dois ângulos internos congruentes (30°); logo, os lados opostos a esses ângulos são congruentes, isto é, $DA = DC = 50$ m.

Assim, do triângulo ABD, temos:

- ângulo agudo (60°);
- hipotenusa (50 m);
- cateto oposto (h).

Relacionando esses valores ao seno de 60°, concluímos:

$$\text{sen } 60° = \frac{h}{50} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{50}$$

$$\therefore 2h = 50\sqrt{3}$$

$$\therefore h = 25\sqrt{3}$$

Logo, a altura do edifício é $25\sqrt{3}$ m, ou seja, aproximadamente 43,3 m.

REFERÊNCIAS

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática I**. 2. ed. São Paulo: Modera Plus, 2010. 3 v.