INSTITUTO FEDERAL
SANTA CATARINA

Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
INSTITUTO FEDERAL DE SANTA CATARINA

Curso: Licenciatura em Matemática – Campus Tubarão
Unidade Curricular: Atividade De Extensão IV.
Professora: Me. Vanessa Soares Sandrini Garcia
Aluno: Lucas Zamparetti Oliveira.

Sistemas Lineares

Tubarão,

2022

EQUAÇÃO LINEAR

Toda equação que pode ser escrita na forma geral

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$ é denominada **equação linear**, em que:

$a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ são números reais chamados de coeficientes;

b é um número real chamado de termo independente;

$x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ são as incógnitas.

Exemplos:

a) $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5$ é uma equação linear a três incógnitas.

b) $x + y - z + t = -1$ é uma equação linear a quatro incógnitas.

OBSERVAÇÕES:

1° Quando o termo independente b for igual a 0, a equação linear denomina-se equação linear homogênea. Por exemplo $5x - 3y = 0$
Ou seja, $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = 0$.

2° Uma equação linear não apresenta termos da forma x_1^2, $x_1 \cdot x_2$ etc., isto é, cada termo da equação tem uma única incógnita, cujo expoente é sempre 1.
As equações $3x_1^2 + 2x_2 = -3$ e $-4x \cdot y + z = \sqrt{2}$ não são lineares.

3° Uma ênupla, ou seja, uma sequência ordenada de *n* números reais $(\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n)$ que, substituídos respectivamente no lugar de $x_1, x_2, ..., x_n$, tornam verdadeira a igualdade $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, é uma solução da equação.

4° A ênupla (0, 0, ..., 0) é uma das soluções de qualquer equação linear homogênea. Por exemplo: a equação $3x + y = 0$ é homogênea e a dupla (0, 0) é uma de suas soluções, pois $3 \cdot 0 + 0 = 0$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 1° GRAU COM DUAS INCÓGNITAS
(Sistemas lineares 2X2)

Consideremos o problema:

Em um estacionamento, há carros e motos, totalizando 14 veículos e 48 rodas. Quantos carros e quantas motos há nesse estacionamento.

Resolvendo:

Primeiramente, indicamos:

- x = a quantidade de carros no estacionamento;
- y = a quantidade de motos no estacionamento.

Seguindo, de acordo com os dados do problema, montamos duas equações:

x + y = 14	e	4x + 2y =48
onde:		onde:
x = quantidade de carros		4x → cada carro tem 4 rodas
y = quantidade de motos		2y → cada moto tem 2 rodas
14 = quantidade de veículos		48 = quantidade total de rodas.

Quando duas equações de 1° grau com duas incógnitas são escritas ligadas pelo conectivo e, dizemos que há um **sistema de duas equações do 1° grau com duas incógnitas** (no caso, x e y).

Podemos representar esse sistema da seguinte maneira: $\begin{cases} x + y = 14 \\ 4x + 2y = 48 \end{cases}$

IMPORTANTE: Quando duas equações formam um sistema, embora cada equação tenha infinitas soluções, devemos procurar a solução que verifica as duas equações simultaneamente.
A solução de um sistema de duas equações do 1° com duas incógnitas, x e y, por exemplo, é um par ordenado (x, y) que é solução tanto da primeira equação como da segunda.

Estudaremos os métodos da substituição e o da adição dentre os métodos algébricos existentes que permitem calcular o par ordenado (x, y), que é a solução de um sistema de duas equações do 1° grau com duas incógnitas.

Método da Adição.

Determinando o valor de x e o de y que satisfazem as duas equações desse sistema, aplicando o método da adição. O método da adição consiste em adicionar membro a membro as equações com o objetivo de obter uma equação equivalente, em que o coeficiente de uma das incógnitas é zero.

Inicialmente multiplicamos uma ou ambas as equações por números específicos, que nos permitam em um segundo momento adicionar, membro a membro, as equações, de modo a anular o coeficiente de uma das incógnitas.

$$\begin{cases} x + y = 14 \cdot (-4) \\ 4x + 2y = 48 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x - 4y = -56 \\ 4x + 2y = 48 \end{cases} \rightarrow$$

- 4x - 4y = - 56

$\underline{\quad 4x + 2y = 48 \quad}$ $\rightarrow$ y = $\frac{8}{2}$ $\rightarrow$ y = 4.

0 - 2y = - 8

Substituindo y por 3 em uma das duas equações do sistema, determinamos o valor de x.

x + y = 14

x + 4 = 14

x = 14 – 4

x = 10

Então, a solução do sistema é o par ordenado (10, 4). Há 10 carros e 4 motos no estacionamento.

Observe que os valores x = 10 e y = 4 satisfazem às duas equações do sistema:

$$\begin{cases} x + y = 10 + 4 = 14 \\ 4x + 2y = 4 \cdot 10 + 2 \cdot 4 = 40 + 8 = 48 \end{cases}$$

Método da Substituição

Um sistema linear 2 X 2 também pode ser resolvido pelo método da substituição, que consiste em expressar uma incógnita em função da outra, utilizando uma das equações e, posteriormente, substituir a expressão na outra equação, para que ela fique com apenas uma incógnita e possa ser resolvida.

Considere o sistema $\begin{cases} 3x - y = -11 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

1°passo – Escolher uma das equações e isolar uma das incógnitas.

Isolando x na equação x + 2y = 8, temos: x = 8 – 2y

2°passo – substituímos x por 8 – 2y na equação $3x - y = -11$.

$3x - y = -11$

$3(8 - 2y) - y = -11$

$24 - 6y - y = -11$

$24 - 7y = -11$

$-7y = -11 - 24$

$-7y \cdot (-1) = -35 \cdot (-1)$

$y = \frac{35}{7} = 5$

Logo, y = 5.

3°passo – substituímos o valor de y em uma das equações:

$x + 2y = 8$

$x + 2 \cdot 5 = 8$

$x + 10 = 8$

$x = 8 - 10$

$x = -2$

Observe que os valores x = - 2 e y = 5 satisfazem às duas equações do sistema:

$3x - y = -11$	$x + 2y = 8$
$3(-2) - 5 = -11$	$-2 + 2\,(5) = 8$
$-6 - 5 = -11$	$-2 + 10 = 8$
$-11 = -11$	$8 = 8$

Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (-2, 5).

Denomina-se sistema linear 2 X 2 o conjunto de duas equações lineares em duas incógnitas que pode ser representado por:

$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$, em que a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1 e b_2 são números reais.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA E CLASSIFICAÇÃO.

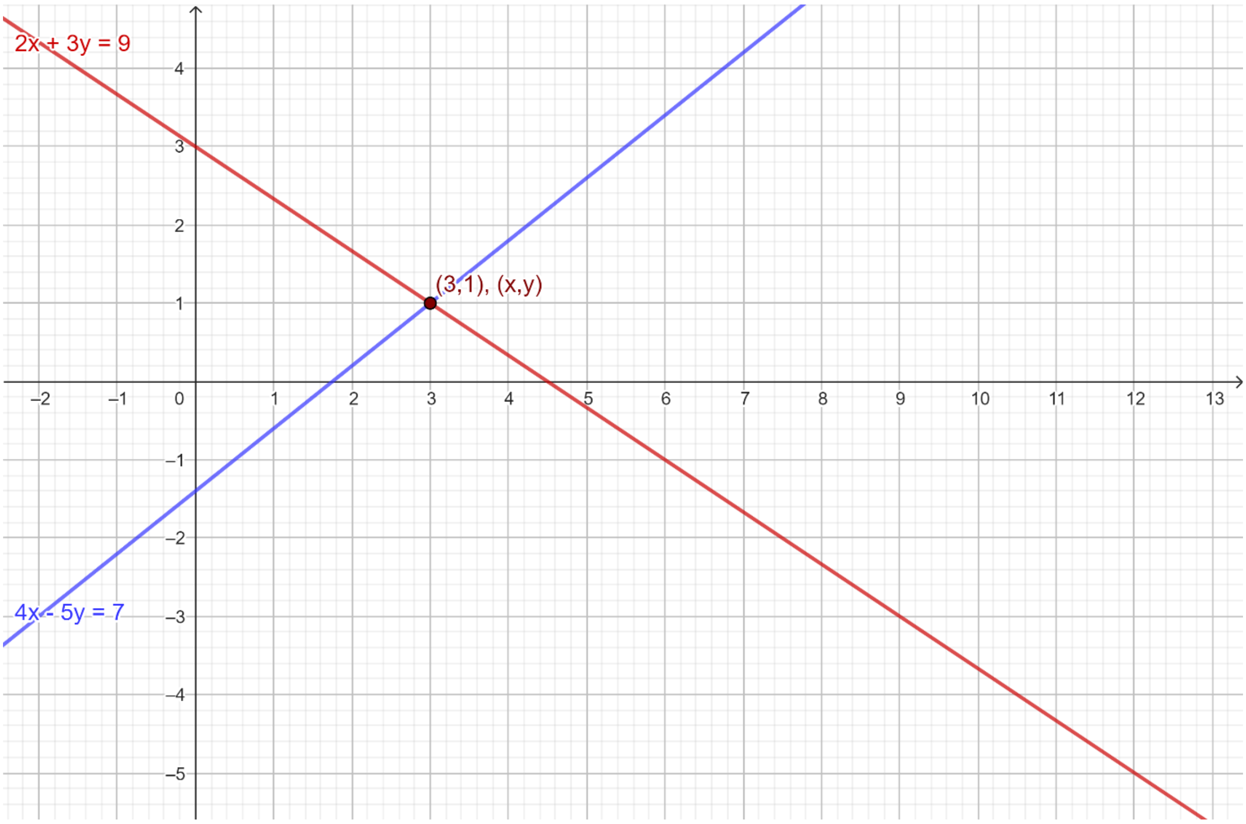
A interpretação geométrica de um sistema de duas equações lineares nas incógnitas x e y pode ser feita por meio de representação gráfica das retas correspondentes a essas equações. Caso haja ponto de intersecção entre essas retas, as coordenadas desses pontos representam a solução do sistema.

Observe o exemplo a seguir.

a) Considere o sistema linear sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 4x - 5y = 7 \end{cases}$

Cada equação linear desse sistema pode ser reescrita na forma

y = ax + b, que pode ser associada à lei de formação de uma função afim. Desenhando em um mesmo plano cartesiano o gráfico das funções do 1° grau associadas às equações desse sistema, obtemos o gráfico abaixo:

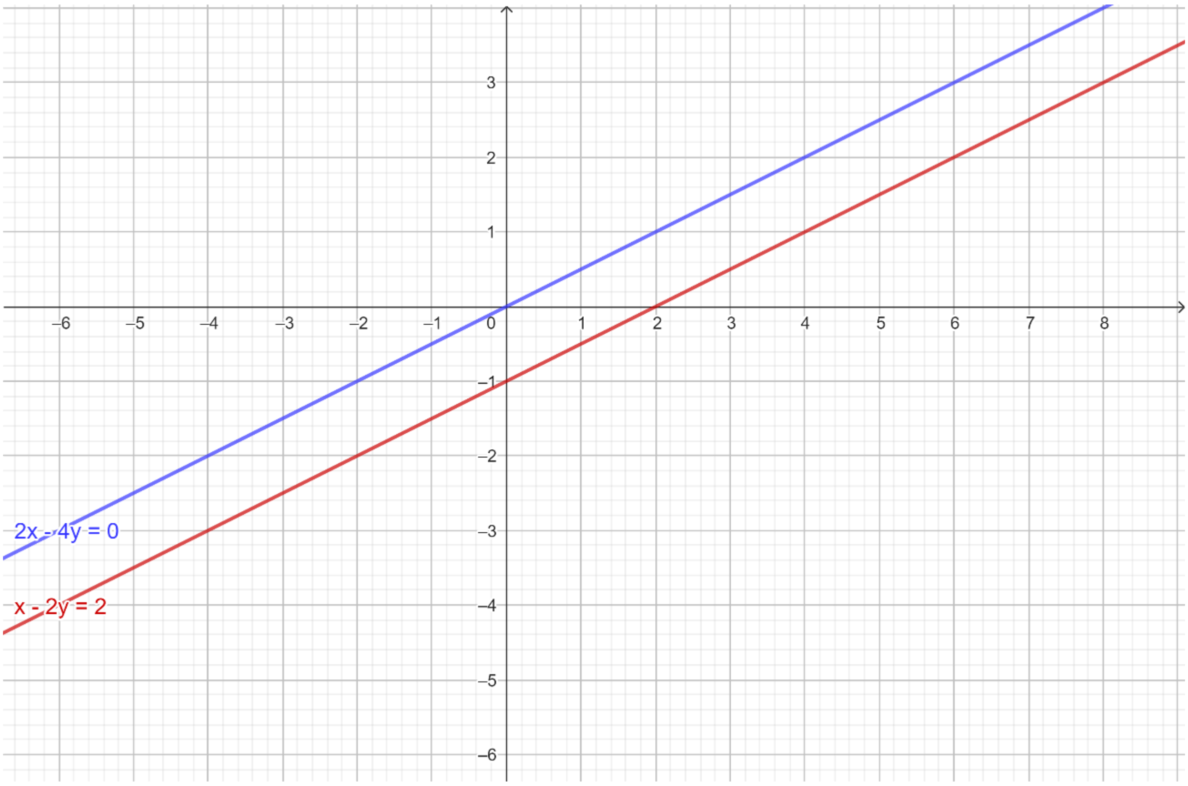


Essas retas são concorrentes (se cruzam em um único ponto). Isso indica que há um único par ordenado, nesse caso (3, 1), que é a solução do sistema.

Como esse sistema possui uma única solução, o classificamos como **sistema possível e determinado (SPD).**

b) Considere o sistema linear $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$

Utilizando raciocínio análogo ao anterior, representamos em um mesmo plano cartesiano o gráfico das funções do 1° grau associadas às equações desse sistema.

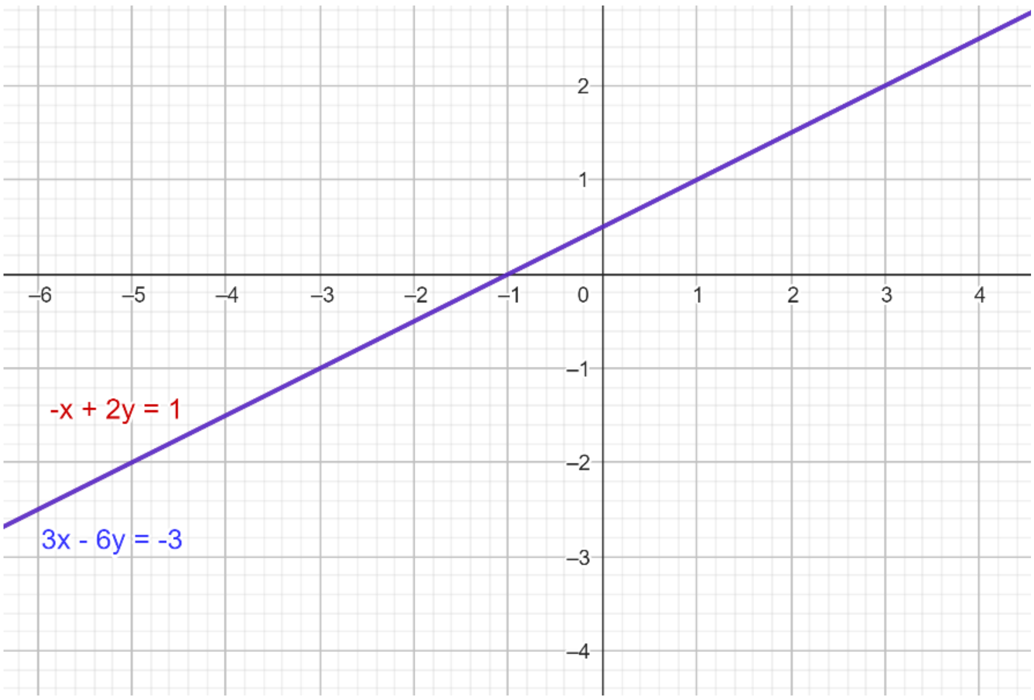


Essas retas são paralelas (elas não se cruzam). Isso indica que não existe um par ordenado que seja solução do sistema.

Como esse sistema não possui solução, o classificamos como um **sistema impossível (SI).**

c) Considere o sistema linear $\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 3x - 6y = -3 \end{cases}$

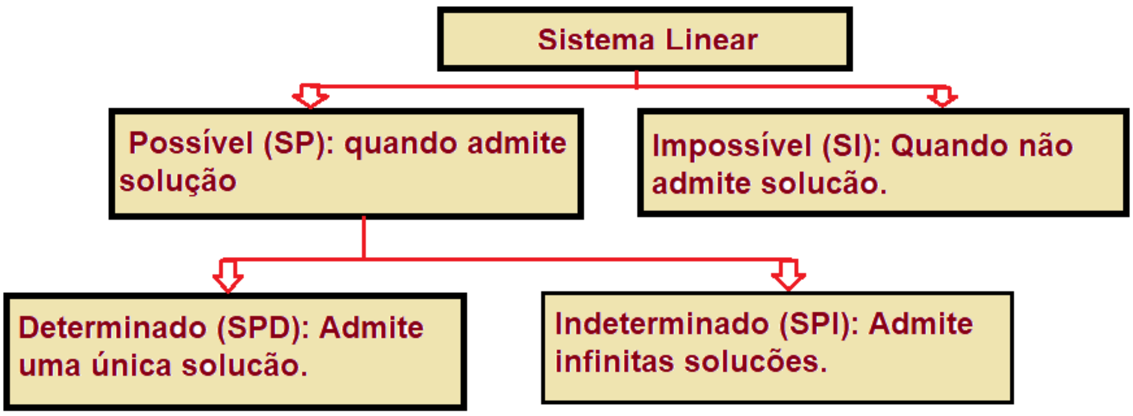
Utilizando raciocínio análogo, representamos em um mesmo plano cartesiano o gráfico das funções do 1° grau associadas às equações desse sistema.



Essas retas são coincidentes (Possuem infinitos pontos de intersecção). Isso significa que possuem infinitos pares ordenado que são soluções do sistema.

Como esse sistema possui infinitas soluções, o classificamos como um **sistema possível e indeterminado (SPI).**

Classificação dos Sistemas Lineares Quanto ao Número de Soluções



IMPORTANTE: Essa classificação é válida para todos os tipos de sistemas estudados nesse documento.

SISTEMAS LINEARES *m* X *n*

Denomina-se sistema linear m X n, de *m* equações com *n* incógnitas a todo o conjunto de *m* equações lineares que pode ser representado da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad . \qquad\quad . \qquad\qquad . \qquad . \\ \quad . \qquad\quad . \qquad\qquad . \qquad . \\ \quad . \qquad\quad . \qquad\qquad . \qquad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Onde:

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as incógnitas.

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, a_{mn}$ são números reais chamados de coeficientes.

$b_1, b_2, \ldots, b_m$ são números reais chamados de termos independentes.

Se o conjunto ordenado de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ satisfizer todas as equações do sistema, será denominado solução do sistema linear.

Perceba que os sistemas 2 X 2 (Sistemas de equações do 1° grau com duas incógnitas) estudados anteriormente, são um caso particular de sistemas lineares, com *m* = 2 e *n* = 2.

Observações:

1- Caso dois sistemas lineares, S_1 e S_2, admitem a mesma solução, dizemos que eles são sistemas equivalentes. Por exemplo:

S_1: $\begin{cases} x + 3y = -5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ ➔ S = {(1, -2)}

S_2: $\begin{cases} 3x + \frac{y}{2} = 2 \\ \frac{-x+y}{3} = -1 \end{cases}$ ➔ S = {(1, -2)}

Como os sistemas lineares 2X2 admitem a mesma solução {(1, -2)}, S_1 e S_2 são equivalentes.

2 – Se o termo independente de todas as equações do sistema for nulo, isto é, $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, o sistema linear será dito homogêneo. Por exemplo

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y + 4z = 0 \\ 5x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

EXPRESSÃO MATRICIAL DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES.

Dentre suas variadas aplicações, as matrizes são utilizadas na resolução de um sistema de equações lineares.

Considere o sistema linear de *m* equações com *n* incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad . \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad . \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Usando matrizes, podemos representa-lo da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matriz formada pelos coeficientes das incógnitas	Matriz coluna formada pelas incógnitas	Matriz Coluna dos termos independentes

Perceba que se você realizar a multiplicação das matrizes indicadas irá obter o sistema dado.

Caso a matriz formada pelos coeficientes das incógnitas for quadrada, o seu determinante é dito determinante do sistema.

Por exemplo:

Considere o sistema: $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 = -1 \\ 7x_1 + x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$

Podemos representa-lo por meio de matrizes, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 6 \\ 7 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$ (forma matricial do sistema linear considerado)

REGRA DE CRAMER

A regra de Cramer é um método para se resolver um sistema linear.

Seja o sistema: $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad . \qquad\quad . \qquad\qquad\quad . \qquad . \\ \quad . \qquad\quad . \qquad\qquad\quad . \qquad . \\ \quad . \qquad\quad . \qquad\qquad\quad . \qquad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

1° Passo - Vamos determinar a matriz A dos coeficientes das incógnitas:

A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$ (matriz dos coeficientes do sistema)

2° Passo – Determinar a matriz A_{x1}, que se obtém a partir da matriz A, substituindo-se a coluna dos coeficientes de x_1 pela coluna dos termos independentes.

A_{x1} = $\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$ pela regra de Cramer: $x_1 = \dfrac{\det A_{x1}}{\det A}$

Onde: det A = determinante associado a matriz A.

Det A_{x1} = determinante associado a matriz A_{x1}

Relembrando: Determinante é um número real que associa a uma matriz quadrada. Matriz quadrada, é a matriz que possui o número de linhas igual ao número de colunas.

Analogamente determinamos os valores das demais incógnitas:

$A_{x2} = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & b_n & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ ➔ $x_2 = \frac{\det A_{x2}}{\det A}$

$A_{xn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & b_n \end{bmatrix}$ ➔ $x_n = \frac{\det A_{xn}}{\det A}$

De forma geral, num sistema linear o valor da incógnita x_1 é dado pela expressão:

$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$ onde: $\begin{cases} A \text{ é a matriz incompleta do sistema} \\ A_i \text{ é a matriz obtida de } A \text{ substituindo} - se \\ \text{as colunas dos coeficientes de } x_i \\ \text{pela coluna dos termos independentes} \end{cases}$

Exemplos:

1) Resolver o sistema $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 5y = -2 \end{cases}$

1° passo:

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

det A = $|A|$ = $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ = 2 · 5 – (-1) · 1 = 10 +1 = 11.

Logo det A = 11

2° passo:

$A_x = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

det A_x = $|A_x|$ = $\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$ = 7 · 5 – (-1) · (-2) = 35 – 2 = 33

logo det A_x = 33

$A_y = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

det A_y = $|A_y|$ = $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$ = 2 · (−2) – 7 · 1 = - 4 – 7 = -11

logo det A_y = -11

3° passo:

x = $\frac{det A_x}{\det A}$ = $\frac{33}{11}$ = 3 y = $\frac{det A_y}{\det A}$ = $\frac{-11}{11}$ = 1

Observe que o sistema é possível e determinado.

Resposta: S = {(3, -1)}

2) Resolver o sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y + 5z = 10 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

1° passo: Cálculo do determinante da matriz incompleta.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$ (Regra de Sarrus)

det A = 1· (- 4) · 1 + 2 · 5 · 1 + (- 1) · 3 · 1 – (-1) · (- 4) · 1 – 1 · 5 · 1 – 2 · 3 · 1 =

- 4 + 10 – 3 – 4 – 5 – 6 = -12

Logo, det A = - 12.

2° passo: Cálculo do determinante das incógnitas.

$A_x = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 10 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ➔ det A_x = - 24

$A_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 10 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ➔ det A_y = 12

$A_z = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ➔ det A_z = 0

3° passo: Cálculo das incógnitas.

x = $\frac{det A_x}{\det A}$ = $\frac{-24}{-12}$ = 2

y = $\frac{det A_y}{\det A}$ = $\frac{12}{-12}$ = -1

z = $\frac{det A_z}{\det A}$ = $\frac{0}{-12}$ = 0

O sistema é possível e determinado

Resposta: S = {(2, -1, 0)}

DISCUSSÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Seja o sistema linear de n equações a n incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_m \end{cases}$$

Discutir o sistema é saber se ele é **possível, impossível ou indeterminado.**

Usando a regra de Cramer temos:

$x_1 = \frac{\det A_{x1}}{\det A}$, $x_2 = \frac{\det A_{x2}}{\det A}$, ..., $x_n = \frac{\det A_{xn}}{\det A}$

Possível e determinado (admite uma única solução)	➔	det A ≠ 0
Possível e indeterminado (admite infinitas soluções)	➔	$\begin{cases} \det A = 0 \\ e \\ \det A_{x1} = \det A_{x2} = \ldots = \det A_{xn} = 0 \end{cases}$

Impossível (não admite solução)	➔	$\begin{cases} \det A = 0 \\ e \\ pelo\ menos\ um \det A_{xn} \neq 0 \end{cases}$

Exemplos:

1) Discutir o sistema $\begin{cases} 3x + my = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$

Resolução:

Calcular o valor dos determinantes

A = $\begin{bmatrix} 3 & m \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ➔ det A = -3 – m

A_x = $\begin{bmatrix} 2 & m \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ➔ det A_x = - 2 – m

A_y = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ➔ det A_y = 1

Fazendo:

det A = 0 ➔ - 3 – m = 0 ➔ m = - 3 (- 3 – m = 0 ➔ - 3 – (- 3) = 0 ➔ 0 = 0)

det A_x = 0 ➔ - 2 – m = 0➔ m = - 2 (- 2 – m = 0 ➔ - 2 – (- 2) = 0 ➔ 0 = 0)

Resposta:

Sistema possível e determinado (SPD): quando: m ≠ - 3 (atendendo assim a condição: det A ≠0)

Sistema possível e indeterminado (SPI): $\nexists m$ (não existe m que atenda a condição)

Sistema Impossível (SI): quando m = - 3 (atendendo assim a condição: det A = 0, sendo que já temos A_y = 1≠ 0).

2) Verificar se o sistema $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ é determinado ou indeterminado.

Resolução:

Calcular os determinantes

A = $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ➔ det A = 5

A_x = $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ➔ det A_x = 0

A_y = $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ➔ det A_y = 0

Como det A = 5 ≠ 0, o sistema é possível determinado.

Assim vamos calcular a solução:

$x = \frac{det A_x}{\det A} = \frac{0}{5} = 0$

$y = \frac{det A_y}{\det A} = \frac{0}{5} = 0$

Resposta: O Sistema é possível e determinado e S = {(0, 0)}.

Observação: Os materiais e conteúdos (textos,explicações, exemplos, exercícios, etc.) utilizados neste documento, foram retirados dos livros que estão referenciados abaixo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BONJORNO, José Roberto; et al. **Matemática Fundamental**. 1. ed. São Paulo: Saraiva, 1994. Pg.169 a 208.

BONJORNO, José Roberto; et al. **Matemática Ensino Médio**. Prisma. 1. ed. São Paulo: FTD, 2020. Pg. 34 a 61

CASTRUCCI, Benedicto; GIOVANI JÚNIOR, José Ruy. **A Conquista da Matemática**. 4. Ed. São Paulo: FTD, 2018. Pg 148 a 160.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática Compreensão e Prática.** 5. Ed. São Paulo: Moderna, 2018. Pg. 47 a 68.