INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus Tubarão

Análise Combinatória

Acadêmico Túlio Búrigo Niero

O que é análise combinatória?

Área da matemática que desenvolve métodos de contagem, possibilitando melhor desenvolvimento nesses processos.

Utilizada nos estudos sobre probabilidade, ela faz análise das possibilidades e das combinações possíveis entre conjunto de elementos.

Além de problemas comuns de contagem, existem três tipos de agrupamentos:

- permutação
- combinação
- arranjo

Em cada situação-problema torna-se necessário **analisar e saber diferenciar o tipo de agrupamento,** pois há métodos específicos para cada tipo, a fim de encontrar o total de reagrupamentos específicos.

O que é Fatorial?

Antes de nos aprofundarmos nos tipos de agrupamentos, vamos entender o que é fatorial? Uma ferramenta muito utilizada em problemas de contagem.

O fatorial de um número natural é definido como o produto deste número por todos os seus antecessores até chegar ao número 1. Utiliza-se o símbolo “!” para indicar o fatorial de um número.

$n! = n * (n-1) * (n-2) * (n-3)...$

Um detalhe: Define-se que o fatorial de zero “0” é igual a 1. 0!=1

Exemplo de Fatorial

Fatorial de 2 = Representado por 2!

$2! = 2 * 1 = 2$ $3! = 3 * 2 * 1 = 6$

$7! = 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 5040$

Princípio fundamental da contagem

Conhecido também como princípio multiplicativo, é a base para os cálculos envolvendo contagem de reagrupamentos.

O Princípio fundamental da contagem diz:

> Se uma decisão *a* pode ser tomada de *n* formas e uma decisão *b* pode ser tomada de *m* formas, e essas decisões são independentes, então o número de combinações possíveis entre essas duas decisões é calculado pela multiplicação $n \cdot m$.

Princípio Multiplicativo

Ligado diretamente a conjunção aditiva “E”. **Multiplica-se.**

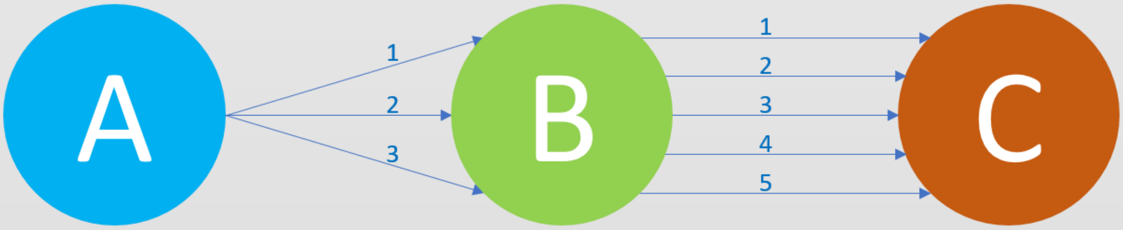
Princípio Aditivo

Ligado diretamente a conjunção aditiva “OU”. **Soma-se.**

Exemplo de Princípio Fundamental

Ana vai viajar da cidade A para a cidade C, mas, durante o percurso, ela decidiu que passará pela cidade B para visitar um museu. Sabendo que há 3 rotas para ir da cidade A para a cidade B, e que há 5 rotas para ir da cidade B para a cidade C, de quantas maneiras distintas Ana pode fazer essa viagem?

Desenhando....



Há duas decisões a serem tomadas:

1ª – rota entre as cidades A e B.

2ª – rota entre as cidades B e C.

Assim, a primeira decisão pode ser tomada de 3 maneiras, e a segunda, de 5 maneiras, logo, basta multiplicar 3x5=15

Observamos no exemplo que temos duas decisões independentes, portanto apenas multiplicamos as possibilidades da primeira decisão, com as possibilidades da segunda decisão.

Agora vamos entender um pouco mais sobre os três tipos de agrupamentos:

O que é Arranjo?

Um agrupamento é conhecido como arranjo quando selecionamos parte dos elementos dentro de um conjunto. Seja *n* a quantidade de elementos de um conjunto, o cálculo do arranjo é a quantidade de agrupamentos ordenados que conseguimos formar com *p* elementos desse conjunto, em que *n>p.*

$$A_{(n,p)} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Lê-se: arranjo de *n* elementos tomados de *p* em *p*

Importante: No Arranjo a ordem dos “objetos” importa, portanto os objetos devem obedecer a ordem estipulada.

Vamos compreender melhor através de EXEMPLOOOO...

Exemplo 01:

10 atletas estão disputando uma corrida de 100 metros rasos, de quantas maneiras distintas podemos ter o pódio, supondo que os atletas sejam igualmente qualificados e sabendo que ele é formado pelo primeiro, segundo e terceiro lugares?

Resolução: Neste caso, a ordem importa, pois teremos, primeiro, segundo ou terceiro lugares.

$$A_{(n,p)} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$A_{(10,3)} = \frac{10!}{(10-3)!} \qquad A_{(10,3)} = \frac{10!}{7!} \qquad A_{(10,3)} = \frac{10 * 9 * 8 * 7!}{7!}$$

$$A_{(10,3)} = \frac{10 * 9 * 8 * 7!}{7!} \qquad A_{(10,3)} = 10 * 9 * 8 = 720$$

Exemplo 02:

Quantos números naturais de quatro algarismos distintos podem ser formados usando-se os algarismos 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

Resolução: É importante observarmos que 2345 ≠ 5432, por isso a ordem importa.

$$A_{(n.p)} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$A_{(8,4)} = \frac{8!}{(8-4)!} \qquad A_{(8,4)} = \frac{8!}{4!} \qquad A_{(8,4)} = \frac{8*7*6*5*4!}{4!} \qquad A_{(8,4)} = 8*7*6*5 = 1680$$

O que é Combinação?

As combinações são subconjuntos em que a ordem dos elementos não é importante, entretanto, são caracterizadas pela natureza dos mesmos. Assim, para calcular uma combinação simples de *n* elementos tomados *p* a *p* ($p \leq n$), utilizamos a seguinte expressão:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Importante: Na combinação a ordem não é importante, então, o conjunto não é ordenado.

Vamos compreender melhor através de EXEMPLOOOO....

Exemplo 03:

Para comemorar o sucesso em vendas de uma corretora de imóveis, a empresa decidiu sortear, entre os 10 funcionários que mais venderam, 4 deles para viajarem para a cidade de Caldas Novas-GO, com a sua família e todas as despesas pagas. Quantos resultados distintos podemos ter com esse sorteio?

Resolução: Observe que a ordem não importa, não interessa quem foi o primeiro, o segundo, ...

$$C_{10,4} = \frac{10!}{4!\,(10-4)!} \qquad C_{10,4} = \frac{10!}{4!\,6!} \qquad C_{10,4} = \frac{10*9*8*7*6!}{4!\,6!} \qquad C_{10,4} = \frac{10*9*8*7}{4*3*2*1}$$

$$C_{10,4} = \frac{5040}{24} = 210$$

Túlio Búrigo Niero

Exemplo 04:

Quantas comissões de 4 elementos podemos formar com 20 alunos de uma turma?

Resolução: para a montagem da comissão a ordem não faz diferença.

$$C_{20,4} = \frac{20!}{4!\,(20-4)!} \qquad C_{20,4} = \frac{20!}{4!\,16!} \qquad C_{20,4} = \frac{20*19*18*17*16!}{4!\,16!}$$

$$C_{20,4} = \frac{20*19*18*17}{4*3*2*1} \qquad C_{20,4} = \frac{116280}{24} = 4.845$$

O que é permutação?

Neste tópico, iremos dividir em 3 tipos de permutações:

1) Permutação Simples:

As permutações são agrupamentos ordenados, onde o número de elementos (n) do agrupamento é igual ao número de elementos disponíveis.

Importante: Na permutação simples a ordem dos elementos é importante, e todos os elementos farão parte desses reordenamentos

Para calcular a permutação de *n* elementos, utilizamos a fórmula:

$$P_n = n!$$

Vamos compreender melhor através de EXEMPLOOOO....

Exemplo 05:

De quantas maneiras 6 pessoas podem se organizar em uma fila?

Resolução: Pelo princípio multiplicativo, sabemos que 6 decisões serão tomadas. Sabemos que há 6 possibilidades para a primeira pessoa, 5 possibilidades para a segunda pessoa, 4 possibilidades para a terceira pessoa, 3 possibilidades para a quarta pessoa, 2 para a quinta pessoa, e, por fim, 1 possibilidade para a última, mas perceba que, ao multiplicar as decisões, estamos calculando nada mais que 6!, sendo assim, sabemos que:

$$P_6 = 6! = 6*5*4*3*2*1 = 720$$

INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

Exemplo 06:

Quantos anagramas existem na palavra **MARTE**?

Anagrama = transposição de letras de palavra

O anagrama nada mais é que o reordenamento das letras de uma palavra, ou seja, vamos permutar as letras de lugar. Como a palavra Marte possui 5 letras, então, o total de anagramas pode ser calculado por:

$$P_5 = 5!$$

$$P_5 = 5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120$$

MRATE, MRAET, MARET, RETAM, ...

2) Permutação com Repetição

O que difere da permutação simples, é que entre os elementos (n) do agrupamento, existe uma repetição. Quando há elementos repetidos nesse conjunto, temos uma permutação com repetição.

Para calcular a quantidade de permutações com repetição de um conjunto com n elementos, calculamos a permutação de (n) e dividimos pelo produto do fatorial de quantas vezes cada um dos elementos se repete. Isso é representado pela seguinte fórmula:

$$P_n^{k_1,k_{2,\dots}k_i} = \frac{n!}{k_1! * k_2! * \cdots * k_i\,!}$$

Vamos compreender melhor através de EXEMPLOOOO....

Exemplo 07:

Quantos são os números de 4 algarismos que podemos formar utilizando 1,1,5,6?

Resolução: Observe que temos a repetição do elemento “1”

Temos 4 elementos, n=4. O elemento “1” aparece 2 vezes, logo k=2

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} \qquad P_4^2 = \frac{4 * 3 * 2!}{2!} \qquad P_4^2 = 12$$

Exemplo 08:

Quantos Anagramas que podemos formar com a palavra MATEMÁTICA?

Resolução: A palavra tem 10 letras. Sendo que a letra "M" repete 2 vezes, a letra "A" repete 3 vezes e a letra "T" repete 2 vezes.

$$P_{10}^{2,3,2} = \frac{10!}{2!\,3!\,2!} \qquad P_{10}^{2,3,2} = \frac{10*9*8*7*6*5*4*3!}{2!\,3!\,2!} \qquad P_{10}^{2,3,2} = \frac{10*9*8*7*6*5*4}{2*1*2*1}$$

$$P_{10}^{2,3,2} = \frac{10*9*8*7*6*5*4}{2*1*2*1} = 151200$$

3) Permutação Circular

É um caso de permutação em que os elementos estão dispostos em um círculo.

Importante: Na permutação circular, a ordem em que um elemento está em relação ao outro em um ciclo importa. Mas não há ordem fixa, ou seja, "girar" os elementos não gera uma nova permutação circular.

Para calcular a permutação circular, utilizamos a fórmula:

$$PC_n = (n-1)!$$

Vamos compreender melhor através de EXEMPLOOOO....

Exemplo 09:

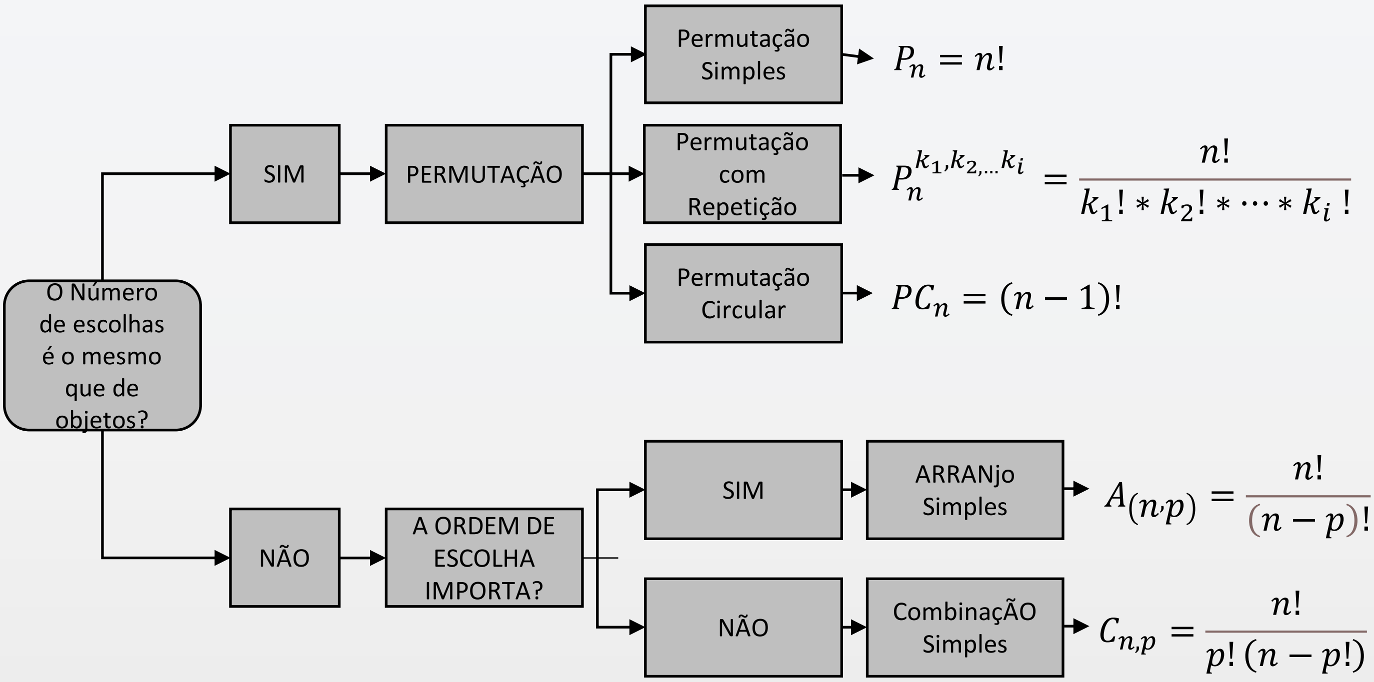
De quantas maneiras podem se distribuir 5 crianças em uma roda?

$$PC_n = (n-1)! \qquad PC_5 = (5-1)! \qquad PC_5 = 4! \qquad PC_5 = 4*3*2*1 = 24$$

INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

RESUMÃO

Para nos ajudar nas resoluções dos problemas, segue um mapa para nos auxiliar.



Caso o problema não se encaixe no quadro, é porque a resolução será através do princípio fundamental da contagem.

Referências:

https://www.preparaenem.com/matematica/analise-combinatoria.htm Acesso em 07 de novembro de 2022.

https://brasilescola.uol.com.br/matematica/analise-combinatoria.htm#Arranjo+simples Acesso em 03 de novembro de 2022.

https://www.todamateria.com.br/analise-combinatoria/ Acesso em 04 de novembro de 2022.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos da matemática Elementar: Combinatória Probabilidade.** Saraiva S.A Livretos Editores, São Paulo, 2013.