INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
INSTITUTO FEDERAL DE SANTA CATARINA

Curso Superior em Licenciatura em Matemática - Câmpus Tubarão
Autor: Alexandro Lima Gomes
Material de estudo preparatório para o ENEM

Polinômios

1 Contextualização

Situação 1: Uma vendedora recebe R$ 1500,00 de salário, mais uma comissão de 2% sobre as vendas. Sendo x o total de vendas, seu salário é dado pela expressão:

$$1500 + 0,02x$$

Situação 2: Em um retângulo, a base mede x e a altura mede $5cm$ a mais que a medida da base. A área do retângulo é dada por:

$$x(x+5) = x^2 + 5x$$

Situação 3: Em um cubo, sendo x a aresta de um cubo, seu volume é dado por:

$$x^3$$

Situação 4: Aumentando em uma unidade a medida da aresta do cubo, o volume do novo cubo será:

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

Cada uma das expressões acima, que representa cada situação descrita, são exemplos de **expressões polinomiais** ou **polinômios**.

2 Definição

Um polinômio é uma expressão dada por:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

onde:

- $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0$ são números reais chamados **coeficientes**;
- n é um número natural ($x \in \mathbb{N}$);
- $x \in \mathbb{C}$ é a variável;
- $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, a_2 x^2, a_1 x, a_0$ são os termos do polinômio.

Exemplo: Dado o polinômio $-3x^3 + x^2 - 4x + 10$, temos que:

- $-3, 1, -4, 10$ são os **coeficientes**;
- $-3x^3, x^2, -4x, 10$ são os termos do polinômio.

3 Grau de um polinômio

É o número natural correspondente ao maior expoente de x, com coeficiente não nulo.

- $4x^3 - 5x^2 + \frac{1}{2}x - 7$ é um polinômio de grau 3;
- $2ix^2 + x - 2$ é um polinômio de grau 2;
- $x + 4$ é um polinômio de gra 1;
- -7 é um polinômio de grau 0.

4 Função polinomial

Considerando uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ em que cada $x \in \mathbb{C}$ associa um polinômio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

A função f recebe o nome de **função polinomial**.

5 Valor numérico de um polinômio

É o número que se obtém ao substituir a variável x por um número qualquer.

Exemplo: Sendo $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + 1$, calcular:

a) $f(2)$

b) $f(i)$

Resolução:

a) $f(2) = 2.2^3 + 2^2 - 4.2 + 1 = 16 + 4 - 8 + 1 = \boxed{13}$

b) $f(i) = 2.i^3 + i^2 - 4.i + 1 = 2.i.i^2 + i^2 - 4.i + 1 = 2i(-1) + (-1) - 4i + 1 = \boxed{\text{-6i}}$

6 Polinômio identicamente nulo

É aquele que possui todos os coeficientes iguais a zero. Assim, o polinômio

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

é nulo quando $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0$ são iguais a zero.

Exemplo: Qual a condição para que o polinômio $ax^2 + bx + (c + 1)$ seja nulo?

Resolução:

Para que o polinômio seja nulo:

- $a = 0$;
- $b = 0$;
- $c + 1 = 0 \to \boxed{\text{c = -1}}$.

7 Polinômios iguais

A condição necessária e suficiente para que dois polinômios $f(x)$ e $g(x)$ sejam iguais ou idênticos é que os coeficientes dos termos correspondentes sejam iguais.

Exemplo: Para quais valores de a e b os polinômios $(a+3)x+(b-1)$ é igual ao polinômio $2x-3$?

Resolução:

Devemos ter que:

$$(a+3)x+(b-1)=2x-3$$

Logo:

a + 3 = 2	b - 1 = -3
a = 2 - 3	b = -3 + 1
$\boxed{\text{a = -1}}$	$\boxed{\text{b = -2}}$

8 Operações com polinômios

8.1 Adição e Subtração

A soma ou subtração de dois polinômios $f(x)$ e $g(x)$ realiza-se somando-se (ou subtraindo-se) os coeficientes dos termos semelhantes.

Exemplo: Dados os polinômios $f(x)=-7x^3+5x^2-x+4$ e $g(x)=-2x^2+8x-7$, obter:

a) $f(x)+g(x)$

b) $f(x)-g(x)$

Resolução:

a) $f(x)+g(x)$

$$(-7x^3+5x^2-x+4)+(-2x^2+8x-7)$$
$$-7x^3+5x^2-x+4-2x^2+8x-7$$
$$-7x^3+5x^2-2x^2-x+8x+4-7$$
$$\boxed{-7x^3+3x^2+7x-3}$$

b) $f(x)-g(x)$

$$(-7x^3+5x^2-x+4)-(-2x^2+8x-7)$$
$$-7x^3+5x^2-x+4+2x^2-8x+7$$
$$-7x^3+5x^2+2x^2-x-8x+4+7$$
$$\boxed{-7x^3+7x^2-9x+11}$$

8.2 Multiplicação

O produto de dois polinômios $f(x)$ e $g(x)$ se dá quando multiplicamos cada um dos termos de $f(x)$ por todos os termos de $g(x)$ e somamos os produtos obtidos.

Exemplo: Dados $f(x) = x - 1$ e $g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2$, efetuar $f(x).g(x)$

Resolução: usando a propriedade distributiva da multiplicação, teremos

$$
\begin{gathered}
(x-1).(2x^3 - 5x^2 + 2) \\
x.2x^3 - x.5x^2 + x.2 - 1.2x^3 + 1.5x^2 - 1.2 \\
2x^4 - 5x^3 + 2x - 2x^3 + 5x^2 - 2 \\
2x^4 - 5x^3 - 2x^3 + 5x^2 + 2x - 2 \\
\boxed{2x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 2x - 2}
\end{gathered}
$$

8.3 Divisão

Como dividir 195 por 8?

Lembrando que 195 é o **dividendo** e 8 é o **divisor**, sendo que o resultado da divisão é o **quociente** e ao final da divisão temos o **resto**. Usando o **método da chave** (aquele que aprendemos no ensino fundamental), vetemos que o quociente será 24 e terá como resto 3.

Obsevamos que:

$$195 = 24.8 + 3.$$

A mesma ideia podemos usar para dividir polinômios. Sendo $f(x)$ e $g(x)$ dois polinômios, com $g(x) \neq 0$.

Dividir $f(x)$ por $g(x)$ é determinar outros dois polinômios: $q(x)$, o quociente e $r(x)$, o resto. Logo, teremos:

$$f(x) = g(x).q(x) + r(x)$$

Exemplo: Usar o método da chave para dividir $f(x)$ por $g(x)$, sendo:

$$
\begin{gathered}
f(x) = 4x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 2 \\
g(x) = x^2 + x - 1
\end{gathered}
$$

Passos:

1) dividir o termo de maior grau de $f(x)$ pelo termo de maior grau de $g(x)$;

2) multiplicar o termo obtido no quociente pelo divisor e subtrair do dividendo;

3) repetir o passo 1, até que o grau do resto fique menor que o grau do divisor.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & -4x^3 & +3x^2 & -2x & +2 & x^2 + x - 1 \\ \cline{6-6}
-4x^4 & -4x^3 & +4x^2 & & & 4x^2 - 8x + 15 \\ \cline{1-3}
 & -8x^3 & +7x^2 & -2x & & \\
 & 8x^3 & +8x^2 & -8x & & \\ \cline{2-4}
 & & 15x^2 & -10x & +2 & \\
 & & -15x^2 & -15x & +15 & \\ \cline{3-5}
 & & & -25x & +17 &
\end{array}
$$

Note que o grau do resto (que é 1) é menor que o grau do quociente (que é 2). A divisão está encerrada.

8.3.1 Divisão pelo binômio x - a

O resto da divisão de um polinômio $f(x)$ por $x - a$ é igual a $f(a)$. Este é o chamado **Teorema do Resto**.

Ou seja: o resto da divisão de $f(x)$ por $x - a$ é o valor de $f(x)$ quando x for a raiz de $x - a$ (quando fazemos $x - a = 0$.

Exemplo 1: Efetuar a divisão de $f(x) = 4x^3 + x^2 - 5x + 8$ por $g(x) = x - 2$.

Resolução: Pelo método da chave, teremos

$$
\begin{array}{rrrr|l}
4x^3 & +x^2 & -5x & +8 & x-2 \\ \cline{5-5}
-4x^3 & +8x^2 & & & 4x^2+9x+13 \\ \cline{1-2}
 & 9x^2 & -5x & & \\
 & -9x^2 & +18x & & \\ \cline{2-3}
 & & 13x & +8 & \\
 & & -13x & +26 & \\ \cline{3-4}
 & & & 34 &
\end{array}
$$

O quociente é igual a $q(x) = 4x^2 + 9x + 13$ e o resto é igual a $r(x) = 34$. O resto também pode ser obtido calculando-se o valor numérico do polinômio $f(x)$ pela raiz de $x - 2$:

$$
\begin{gathered}
x - 2 = 0 \\
x = 2
\end{gathered}
$$

Aplicando $x = 2$ em $f(x)$:

$$
\begin{gathered}
f(2) = 4.2^3 + 2^2 - 5.2 + 8 \\
f(2) = 32 + 4 - 10 + 8 \\
p(2) = 34
\end{gathered}
$$

Exemplo 2: Qual o resto da divisão de $f(x) = 3x^2 - 17x + 15$ por $x - 2$?

Resolução:

1) Calcula-se a raiz do divisor:

$$x - 2 = 0 \to x = 2$$

2) Calcula-se o valor numérico do polinômio para a raiz do divisor:

$$
\begin{gathered}
f(2) = 3.2^2 - 17.2 + 15 \\
f(2) = 12 - 34 + 15 \\
f(2) = -7
\end{gathered}
$$

Logo, o resto da divisão será $r(x) = -7$.

8.3.2 Teorema de D'Alembert

Um polinômio $f(x)$ é divisível pelo binômio $x - a$ se, e somente se $f(a) = 0$.

Exemplo: Determinar o valor de p para que o polinômio $f(x) - 2x^3 + 5x^2 - px + 2$ seja divisível por $x - 2$.

Resolução: Para que $f(x)$ seja divisível por $x - 2$, $f(2) = 0$. Logo:

$$f(2) = 2.2^3 + 5.2^2 - p.2 + 2 = 0$$

$$16 + 20 - 2p + 2 = 0$$

$$38 - 2p = 0$$

$$2p = 38$$

$$p = \frac{38}{2}$$

$$\boxed{p = 19}$$

8.3.3 Dispositivo prático de Briot-Ruffini

É um processo para determinar os coeficientes do quociente da divisão de um polinômio $f(x)$ por $x - a$.

Exemplo: Efetue a divisão de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ por $x - 3$.

Passos:

1) Calculamos a raiz do divisor:

$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

2) Organizamos uma tabela, onde na primeira linha colocamos a raiz do divisor e os coeficientes de $f(x)$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 3 & & & & \\ \hline \end{array}$$

3) Abaixamos o primeiro coeficiente e o multiplicamos pela raiz do divisor, e em seguida, somamos ao segundo coeficiente e a resposta vai logo abaixo:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 3 & & 3 & & \\ \hline & 1 & -1 & & \end{array}$$

4) Repete-se o processo até o último coeficiente, sendo que o último número das linha de baixo é o resto da divisão.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 3 & & 3 & -3 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & \boxed{4} \end{array}$$

Assim, o quociente da divisão de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ por $x - 3$ será $q(x) = x^2 - x + 2$ e o resto será $r(x) = 4$.

9 Bibliografia consultada

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JUNIOR, José Ruy. **Matemática Fundamental**: volume único. São Paulo: Ftd, 1994. 560 p.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática**: volume único. 5. ed. São Paulo: Atual, 2011. 720 p.

LEMOS, Aluisio Andrade; HIGUCHI, Fidefico; FRIDMAN, Salomão. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 1977. 356 p. (Sinopse).