Curso Superior de Licenciatura em Matemática

Autor: Joaquim José Xavier Pascal

Material para estudos - ENEM

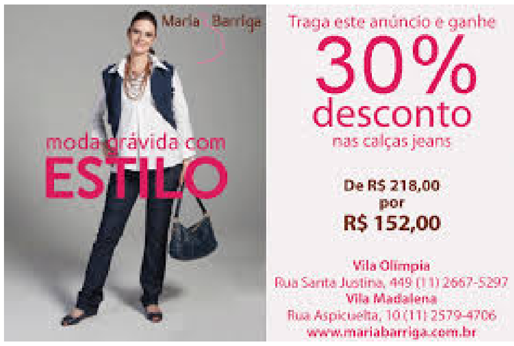
Matemática Financeira

Tópicos a ser abordados

- porcentagem;
- acréscimos e descontos;
- juros simples e compostos.

Porcentagem

É muito comum nos depararmos com os seguintes anúncios:



E que significado damos a elas? Para entender a mensagem transmitida pelos anúncios, devemos ter conhecimento sobre porcentagem e sobre a Matemática Financeira.

Revendo porcentagem

Em anos anteriores, vimos que a porcentagem é uma razão que corresponde à parte considerada de um total de 100 partes. Por exemplo:

- 15% corresponde a $\frac{15}{100}$ ou 0,15;

- 40% corresponde a $\frac{40}{100}$ ou 0,4;
- 0,1% corresponde a $\frac{0,1}{100}$ ou 0,001.

Nos anúncios mostrados anteriormente, 70% corresponde a $\frac{70}{100}$ ou 0,7. Do mesmo modo, 30% corresponde a $\frac{30}{100}$ ou 0,3.

Exemplo 1: Em uma sala de aula do 3° ano do Ensino Médio há 25 alunos, sendo 12 do sexo masculino. Qual a porcentagem de alunos do sexo masculino nessa sala?

Resolução: Como 12 em cada 25 alunos são do sexo masculino, obtemos a fração $\frac{12}{25}$. Escrevendo uma fração equivalente a $\frac{12}{25}$ com denominador igual a 100, temos:

$$\frac{12}{25} = \frac{12.4}{25.4} = \frac{48}{100} = 48\%$$

Utilizando número decimal:

$$\frac{12}{25} = 0,48 = \frac{48}{100} = 48\%$$

Utilizando regra de três:

25 alunos ------ 100%
12 alunos ------ x %

$$25 \,.\, x = 12 \,.\, 100 \rightarrow 25.x = 1200 \rightarrow x = \frac{1200}{25} = 48\%$$

Portanto, vimos três formas de determinar a porcentagem de alunos do sexo masculino na sala, obtendo sempre o mesmo resultado: 48%.

Exemplo 2: Fernanda pagou R$ 375,00 em uma prestação do financiamento de sua motocicleta, o que corresponde a 12% de seu salário. Podemos calcular o valor do salário de Fernanda da seguinte maneira:

Resolução: Chamando o salário de Fernanda de s, temos:

$$12\% \text{ de } s \rightarrow \frac{12}{100} \,.\, s = 375 \rightarrow 12s = 375 \,.\, 100 \rightarrow 12s = 37500 \rightarrow s = \frac{37500}{12} \rightarrow s = 3125$$

Logo, o salário de Fernanda é de R$ 3125,00.

Exemplo 3: Certo eletrodoméstico teve um reajuste de 3%, passando a custar R$ 590,00. Podemos calcular o valor desse eletrodoméstico antes do reajuste da seguinte maneira:

Resolução: Chamando de x o preço do eletrodoméstico antes do reajuste, esse preço era 100% de x. Após o reajuste de 3%, o preço passou a ser de 100% + 3% = 103% de x. Assim, temos:

$$\frac{103}{100} \cdot x = 590 \rightarrow 103x = 59000 \rightarrow x = \frac{59000}{103} \rightarrow x = 572,82$$

Logo, o preço do eletrodoméstico antes do reajuste era de R$ 572,82.

Exemplo 4: Certa loja de roupas está promovendo uma liquidação de verão, dentro da ação denominada "Black Friday". O desconto oferecido é de 30% sobre o preço de etiqueta de qualquer peça da loja. Se uma blusa custa na etiqueta R$ 218,00, qual será o valor aplicando o desconto de 30%?

Resolução: Após o desconto de 30%, o preço passou a ser de 100% - 30% = 70% do preço inicial. Assim, temos:

$$70\% \text{ de } 218 \rightarrow \frac{70}{100} \cdot 218 \rightarrow 0,7 \cdot 218 = 152,6$$

Logo, o preço da blusa com o desconto oferecido será de R$ 152,60.

Acréscimos e descontos sucessivos

Nos exemplos anteriores, vimos algumas situações que envolveram descontos e acréscimos simples. Veremos a partir de agora, situações onde os acréscimos e descontos incidem de forma sucessiva.

Exemplo 5: Um comerciante de roupas aplicou um acréscimo de 5% sobre o preço de uma calça. No mês seguinte, sobre o preço já reajustado, aplicou novo acréscimo de 8%. Qual o preço atual da calça, sendo que antes do primeiro reajuste custava R$ 45,00?

Resolução: observe que o primeiro acréscimo incidiu sobre o valor inicial da calça, de R$ 45,00. Sobre o resultado, incidiu o segundo acréscimo. Quando isso acontece, dizemos que são acréscimos sucessivos. Podemos calcular o preço atual da calça da seguinte maneira:

- 1° acréscimo: considerando o preço inicial da calça como 100%. Após o primeiro acréscimo de 5%, o valor será 100% + 5% = 105%. Assim:

$$\frac{105}{100} \cdot 45 = 1,05 \cdot 45 = 47,25$$

O preço da calça, após o 1° reajuste, foi para R$ 47,25.

- 2° acréscimo: agora, consideramos o preço da calça com o primeiro acréscimo como 100%. Após o segundo acréscimo de 8%, o valor será 100% + 8% = 108%. Assim:

$$\frac{108}{100} \cdot 47,25 = 1,08 \cdot 47,25 = 51,03$$

Logo, o preço atual da calça, depois de dois reajustes, é de R$ 51,03.

IMPORTANTE: deve-se perceber que, nesse caso, não podemos simplesmente adicionar 5% + 8% e considerar um único acréscimo de 13% sobre o valor de R$ 45,00, pois daria um valor final de R$ 50,85. Para obter uma única porcentagem equivalente aos acréscimos de 5% e 8%, devemos multiplicar os valores 1,05 e 1,08, chamados de fatores de atualização.

Assim, os acréscimos sucessivos de 5% e 8% equivalem a um único acréscimo de 13,4%:

$$\frac{113{,}4}{100} \cdot 45 = 51{,}03 \rightarrow \text{R\$ } 51{,}03$$

que é o mesmo resultado calculado anteriormente.

Sistematizando essa ideia, se i_1, i_2, i_3, …, i_n são as taxas, na forma decimal, de n-ésimos acréscimos sucessivos que incidem sobre um valor inicial P_o, então os valores obtidos após cada acréscimo, indicados por P_1, P_2, P_3, …, P_n, respectivamente, são dados por:

- $P_1 = P_0 \cdot (1 + i_1)$
- $P_2 = P_1 \cdot (1 + i_2) = P_0 \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2)$
- $P_3 = P_2 \cdot (1 + i_3) = P_0 \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3)$
- …
- $P_n = P_{n-1} \cdot (1 + i_n) = P_0 \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3) + \ldots + (1 + i_n)$

Portanto, o valor final $P = P_n$ obtido após todos os acréscimos sucessivos, é dado por:

$$P_n = P_0 \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3) + \ldots + (1 + i_n)$$

Para o exemplo anterior, o preço final da calça, após os dois acréscimos sucessivos, é dado por:

$$P = 45 \cdot (1 + 0{,}05) \cdot (1 + 0{,}08) = 51{,}03 \rightarrow \text{R\$ } 51{,}03$$

Descontos sucessivos

Exemplo 6: Acompanhe a situação a seguir: um carro novo custa R$ 65.890,00 e a cada ano, sofre uma depreciação de 15% em relação a seu preço. Comprando o carro hoje, qual o valor dele ao final de dois anos?

Resolução: observe que nesse caso o primeiro desconto incide sobre o preço inicial; sobre o resultado incide o segundo desconto. Quando isso acontece, temos o que chamamos de descontos sucessivos.

Podemos calcular o preço do carro após os sucessivos descontos da seguinte forma:

- 1º desconto: considerando o preço inicial do veículo como 100%, após o desconto de 15% o valor será 100% - 15% = 85% do inicial. Assim:

$$85\% \text{ de } 65890 = \frac{85}{100} \cdot 65890 = 56006{,}5 \rightarrow \text{R\$ } 56.006{,}50$$

- 2º desconto: agora, consideramos o preço do veículo com o 1º desconto como 100%. Após o segundo desconto de 15%, o valor será 100% - 15% = 85%. Assim:

$$85\% \text{ de } 56\,006{,}50 = \frac{85}{100} \cdot 56\,006{,}50 = 47605{,}52 \rightarrow \text{R\$ } 47.605{,}52$$

Portanto, o preço do veículo ao final de dois anos será de R$ 47.605,52. Importante notar que não podemos simplesmente adicionar 15% e 15% e considerar um desconto único de 30% sobre o preço inicial, pois daria R$ 46.123,00.

Para se obter uma única porcentagem equivalente aos dois descontos de 15%, devemos multiplicar os valores 0,85 e 0,85, também chamados de fatores de atualização. Assim, temos:

$$0{,}85 \cdot 0{,}85 = 0{,}72225 = \frac{72{,}25}{100} \cdot 72{,}25\%$$

$$72{,}25\% \text{ de } 56\,006{,}50 = 0{,}72225 \cdot 56\,006{,}50 \rightarrow \text{R\$ } 47.605{,}52$$

que é o mesmo resultado obtido anteriormente.

Sistematizando essa ideia, se i_1, i_2, i_3, …, i_n são as taxas, na forma decimal, de n-ésimos descontos sucessivos que incidem sobre um valor inicial P_o, então os valores obtidos após cada acréscimo, indicados por P_1, P_2, P_3, …, P_n, respectivamente, são dados por:

- $P_1 = P_0 \cdot (1 - i_1)$
- $P_2 = P_1 \cdot (1 - i_2) = P_0 \cdot (1 - i_1) \cdot (1 - i_2)$
- $P_3 = P_2 \cdot (1 - i_3) = P_0 \cdot (1 - i_1) \cdot (1 - i_2) \cdot (1 - i_3)$
- …
- $P_n = P_{n-1} \cdot (1 - i_n) = P_0 \cdot (1 - i_1) \cdot (1 - i_2) \cdot (1 - i_3) + \ldots + (1 - i_n)$

Portanto, o valor final $P = P_n$ obtido após todos os acréscimos sucessivos, é dado por:

$$P_n = P_0 \cdot (1 - i_1) \cdot (1 - i_2) \cdot (1 - i_3) + \ldots + (1 - i_n)$$

Para o exemplo anterior, o preço final do veículo, após os dois descontos sucessivos, é dado por:

$$P = 56\,006{,}50 \cdot (1 - 0{,}15) \cdot (1 - 0{,}15) = 47605{,}52 \rightarrow \text{R\$ } 47.605{,}52$$

Juros simples e juros compostos

O juro, de uma forma simplificada, representa um "aluguel sobre o dinheuiro", ou seja, é uma compensação em dinheiros que se paga, ou se recebe, pelo dinheiro emprestado. Quando compramos a prazo, isto é, se levando o produto no ato e efetuando o pagamento algum tempo depois, geralmente pagamos juros sobre o valor do produto. Do mesmo modo, quando colocamos algum valor em certo banco, recebemos juros sobre a quantia aplicada, de acordo com o investimento e o período dessa aplicação, como a poupança, por exemplo.

Existem alguns termos utilizados em situações que envolvem juros, entre eles:

- **capital (c)** : quantia em dinheiro investida ou emprestada;
- **juro (j)**: acréscimo ou rendimento pago pelo investimento ou empréstimo de certa quantia;
- **taxa de juro (i)**: razão entre o juro e o capital, considerando determinado período de tempo;
- **tempo (t)**: período em dias, meses, anos, etc., em que uma quantia é investida ou emprestada;
- **montante (M)**: resulta da adição do capital com o juro, geralmente indicado por M = c + j.

Em geral, são utilizadas abreviações para indicar a frequência da taxa. As mais comuns são:
- ao dia: a.d.;
- ao mês: a.m.;
- ao ano: a.a.

Dependendo de que forma a taxa de juros incide sobre o capital, temos os chamados juros simples e os juros compostos.

Juros simples

Exemplo 7: Acompanhe a situação: Simone fez uma aplicação no valor de R$ 1000,00 durante 7 meses, à taxa de juros simples de 0,65% a.m. Podemos calcular o montante obtido por Simone ao final da aplicação da seguinte forma:

Resolução: Temos que:

- capital: R$ 1000,00 → c = 1000
- tempo: 7 meses → t = 7
- taxa de juro: 0,65 a.m. → i = 0,65% = $\frac{0,65}{100}$ = 0,0065

Calculando o juro simples ao final de cada mês, temos:

0,65% de 1000 = 0,0065 . 1000 = 6,5 → R$ 6,50

Como o capital ficou aplicado por 7 mesas, multiplicamos o juro de um mês por 7:

$$6{,}5 \,.\, 7 = 45{,}5 \rightarrow \text{R\$ } 45{,}50$$

Observe que, para determinar o valor do juro, multiplicamos o valor do investimento pela taxa de juro (na forma decimal) e pelo tempo de aplicação, no que resulta na fórmula

$$j = c \,.\, i \,.\, t$$

$$j = 1000 \,.\, 0{,}0065 \,.\, 7 = 45{,}5 \rightarrow \text{R\$ } 45{,}50$$

Como queremos determinar o montante, adicionamos o capital ao juro:

$$M = c + j$$

$$M = 1000 + 45{,}5 = 1045{,}5 \rightarrow \text{R\$ } 1.045{,}50$$

Assim, o montante obtido por Simone ao final de 7 meses é R$ 1.045,50.

Sistematizando essa ideia do juro simples, temos:

- calculamos o juro simples pela fórmula: $j = c \,.\, i \,.\, t$
- nessa fórmula, j é o juro, c é o capital, i é a taxa de juro e t o período de tempo;
- para calcular o montante, utilizamos a seguinte fórmula:

$$M = c + j$$

Mas como $j = c \,.\, i \,.\, t$, podemos fazer

$$M = c + j = c + c \,.\, i \,.\, t$$

$M = c\,(1 + i \,.\, t) \rightarrow$ esta é a fórmula para o cálculo do montante diretamente.

Importante lembrar que para aplicar na fórmula anterior do montante, tanto o tempo quanto a taxa de juro devem estar na mesma unidade de tempo. Em casos que isso não ocorra, devemos transformar a taxa ou o período na mesma unidade de tempo.

No juro simples, uma taxa de 2,1% a.m. equivale a uma taxa de 25,2% a.a. (2,1 .12 meses). Da mesma forma, uma taxa de 36% a.a. equivale a uma taxa de 3% a.m.

Juro composto

Diferente dos juros simples, calculados sobre o capital inicial, os juros compostos são calculados sempre sobre o montante obtido no período anterior.

Exemplo 8: Acompanhe a situação: Talita aplicou R$ 2.580,00 a uma taxa de juro composto de 3% a.m. durante 3 meses. Podemos calcular o montante obtido ao final dessa aplicação da seguinte maneira.

Resolução: O sistema de juros compostos corresponde a um caso particular de acréscimos sucessivos, cujas taxas de acréscimo são todas iguais. Para calcular os acréscimos sucessivos, utilizamos a seguinte fórmula:

$$P = P_o \;.\; (1 + i_1) \;.\; (1 + i_2) \;.\; (1 + i_3)$$

Mas como as taxas são iguais, podemos fazer $i_1 = i_2 = i_3 = i$. Também considerando que o preço inicial P_o é o capital c e P é o montante M, podemos reescrever a fórmula anterior como:

$$M = c \;.\; (1 + i) \;.\; (1 + i) \;.\; (1 + i)$$

Aplicando os dados fornecidos, temos:

$$M = 2580 \;.\; (1 + 0{,}03) \;.\; (1 + 0{,}03) \;.\; (1 + 0{,}03) \approx 2819{,}24$$

Portanto, o montante obtido por Talita ao final da aplicação foi de R$ 2.819,24.

Sistematizando a ideia do juro composto, temos:

$$M = c \;.\; (1 + i_1) \;.\; (1 + i_2) \;.\; (1 + i_3) \;.\; \ldots \;.\; (1 + i_n)$$

Mas as taxas são iguais, e assim: $i_1 = i_2 = i_3 = \ldots = i_n = i$

Como as taxas de acréscimos estão associadas a um período de tempo, temos que n = t. Logo:

$$M = c \;.\; (1 + i_1) \;.\; (1 + i_2) \;.\; (1 + i_3) \;.\; \ldots \;.\; (1 + i_n)$$

ou

$$M = c \;.\; (1 + i)^t$$

Utilizando essa fórmula para obter o montante da situação anterior, temos:

$$M = c \;.\; (1 + i)^t$$

$$M = 2580 \;.\; (1 + 0{,}03)^3 \approx 2819{,}24 \rightarrow \text{R\$ } 2.819{,}24$$

Bibliografia Consultada

BALESTRI, Rodrigo. **Matemática 2**: interação e tecnologia. 2. ed. São Paulo: Leya, 2016. 226 p.

SOUZA, Joamir Roberto de; GARCIA, Jacqueline da Silva Ribeiro. **#Contato Matemática**: 3º ano. São Paulo: Ftd, 2016. 226 p.