Curso: Licenciatura em Matemática
Módulo: IV
Unidade curricular: Atividade de Extensão IV
Professora: Vanessa Soares Sandrini Garcia
Estudante: Jhonatan Domingos Cardoso

LOGARITMO

Definição

Podemos entender o logaritmo como um expoente, e como a operação inversa da potenciação. Perceba isso em sua definição algébrica.

$log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$	$a \rightarrow logaritmando$ $b \rightarrow base$ $x \rightarrow logaritmo$

Lemos $log_b a$ como "log de a na base b". E essa operação busca encontrar o expoente que leve b à ser igual a a, ou seja $b^x = a$.

Antes de vermos algum exemplo, temos que saber que por definição, o logaritmo tem condições de existência. Sendo estas que:

$$a > 0$$
$$b > 0$$
$$b \neq 1$$

Exemplos:

$a)\ log_8 64\ =? \rightarrow log_8 64\ =\ 2\ pois\ 8^2\ =\ 64$

Este é um exemplo mais simples onde notamos sem muita dificuldade que 8^2 é igual a 64.

$b)\ log_9 3\ =\ ?$

Quando a resposta não vem de forma simples, podemos igualar nossa expressão a x, e então buscar representar os dois lados da igualdade na mesma base. Para que assim possamos anular as bases e igualar os expoentes.

$log_9 3\ =\ x \quad \rightarrow \quad 9^x\ =\ 3 \quad \rightarrow \quad \left(3^2\right)^x\ =\ 3 \quad \rightarrow 3^{2x}\ =\ 3^1 \rightarrow 2x\ =\ 1 \quad \rightarrow \quad x\ =\ \frac{1}{2}$

$c)\ log_2(x\ -\ 3) =$

Quando temos uma expressão envolvendo x (variável) no logaritmando, este x pode assumir diferentes valores, mas tem que atender a condição de existência dos logaritmos, da qual o logaritmando tem que ser maior que 0.

$x\ -\ 3\ >\ 0 \quad \rightarrow \quad x\ >\ 3$

Através da definição dos logaritmos, podemos concluir algumas coisas, sendo estas:

$log_k k\ =\ 1$ pois $k^1\ =\ k$
$log_k 1\ =\ 0$ pois $k^0\ =\ 1$
$log_k k^j\ =\ j$ pois $k^j\ =\ k^j$
$k^{log_k a}\ =\ a$ Observe o exemplo numérico: $2^{log_2 4}\ =\ ?$ Note que $log_2 4$ é igual ao expoente que leva 2 a ser igual a 4, ou seja $log_2 4\ =\ 2 \rightarrow 2^2\ =\ 4$. Então quando trocarmos o $log_2 4$ na expressão inicial por 2, vamos ter como resultado o 4. Perceba: $2^{log_2 4}\ =\ ?\ \rightarrow 2^{log_2 4}\ =\ 2^2\ =\ 4$.

Propriedades

$log_b(a.c) =\ log_b a\ +\ log_b c$
$log_b\left(\frac{a}{c}\right) =\ log_b a\ -\ log_b c$

$log_b a^k = k \cdot log_b a$
$log_{b^k} a = \frac{1}{k} \cdot log_b a$

Exemplos:

$a)\ log_2(4.(x+2)) = log_2 4 + log_2(x+2) \rightarrow 2 + log_2(x+2)$. Lembre que $x + 2 > 0 \rightarrow x > -2$

$b)\ log_3\left(\frac{27}{9}\right) = log_3 27 - log_3 9 \rightarrow 3 - 2 = 1$.

$c)\ log_7 9^2 = 2 \cdot log_7 9 \rightarrow 2 \cdot log_7 3^2 = 2 \cdot 2 \cdot log_7 3 = 4 \cdot log_7 3$.

$d)\ log_{2^5} 16 = \frac{1}{5} \cdot log_2 16 \rightarrow \frac{1}{5} \cdot 4 = \frac{4}{5}$.

Mudança de base

Se temos um problema no qual nossas informações estão em uma base diferente da qual podemos trabalhar, podemos usar a seguinte fórmula:

$$log_b a = \frac{log_c a}{log_c b}$$

Onde c vai ser a base que precisamos utilizar. Observe no exemplo abaixo:

*Se $log_{20} 2 = a$ e $log_{20} 3 = b$, calcule $log_6 5 = ?$.

$$log_6 5 = \frac{log_{20} 5}{log_{20} 6} \rightarrow \frac{log_{20}\left(\frac{20}{4}\right)}{log_{20}(2 \cdot 3)}$$

Primeiro perceba que $6 = 2 \cdot 3$ e que $5 = \frac{20}{4}$. Após essas substituições, aplique as propriedades do logaritmo.

$$\frac{log_{20} 20 - log_{20} 4}{log_{20} 2 + log_{20} 3} \rightarrow \frac{1 - log_{20} 2^2}{a + b} = \frac{1 - 2 \cdot log_{20} 2}{a + b} = \frac{1 - 2 \cdot a}{a + b}$$

Note que:

$log_{20} 20 = 1$	$log_{20} 4 = log_{20} 2^2 = 2 \cdot log_{20} 2 = 2a$
$log_{20} 2 = a$	$log_{20} 3 = b$

Função Logarítmica

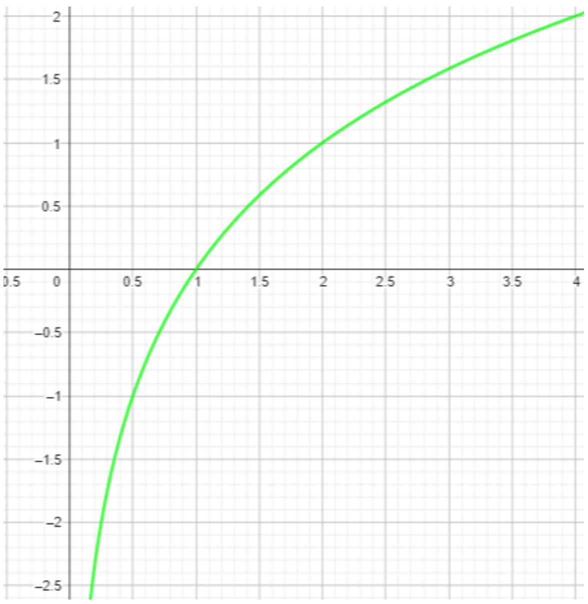
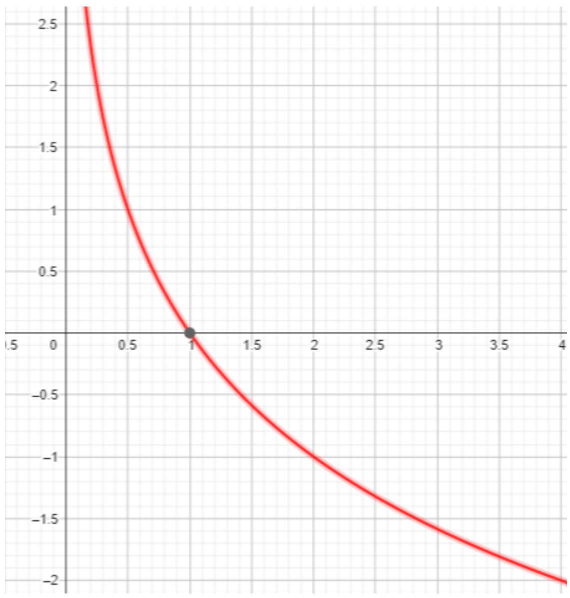
Entendemos por função logarítmica uma função contendo uma variável em um logaritmo. Este tipo de função é a inversa da função exponencial. Observe sua lei de formação:

$$f(x) = log_b x$$
$$b > 0 \; e \; b \neq 1$$

Domínio: A função logarítmica tem como domínio R_+^* (números reais positivos sem o 0), ou seja $x > 0$, isso se dá pela definição do logaritmo.

Imagem: A função logarítmica tem como imagem R (números reais).

Gráfico da função: O gráfico da função logarítmica pode ser crescente ou decrescente, dependendo do valor da base. Será crescente se $b > 1$ e decrescente se $0 > b > 1$.

Crescente	Decrescente
$f(x) = log_2 x$	$f(x) = log_{\frac{1}{2}} x$
	

Equação Logarítmica

Entendemos por equação logarítmica uma equação contendo uma variável em um logaritmo.

Primeiro tipo: $log_b A = log_b B$

Note que podemos anular o log neste caso e igualar A a B. Observe.

Exemplo: $log_5(3x - 2) = log_5(x + 1) \rightarrow 3x - 2 = x + 1 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2}$

Lembre que o logaritmando tem que ser maior que 0, e neste caso poderia ocorrer de obtermos um valor de x inválido, por isso vamos averiguar isso nos dois logaritmos.

$log_5(3x - 2) \rightarrow 3x - 2 > 0 \rightarrow x = \frac{2}{3}$

$log_5(x + 1) \rightarrow x + 1 > 0 \rightarrow x > -1$

Como o x que encontramos vale 3/2, nossa resposta é válida, pois 3/2 > 2/3.

Segundo tipo: $log_b A = c$

No segundo tipo não há mistério, vamos aplicar a definição de logaritmo e calcular o valor da variável.

Exemplo: $log_5(2x - 1) = 2 \rightarrow 5^2 = 2x - 1 \rightarrow 25 = 2x - 1 \rightarrow 26 = 2x \rightarrow \frac{26}{2} = x \rightarrow x = 13$

Terceiro tipo: O terceiro tipo consiste em um no qual é conveniente trocar o logaritmo por uma variável. Observe o exemplo.

$log_2^2 x - log_2 x = 2 \rightarrow \left(log_2 x\right)^2 - log_2 x = 2 \rightarrow y^2 - y - 2 = 0$

$y^2 - y - 2 = 0$

$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$y = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} =$

$y' = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = 2$

$y'' = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = -1$

Com os valores de y, vamos voltar então para nossa equação onde igualamos $log_2 x = y$

Portanto:

$log_2 x = 2 \rightarrow 2^2 = 4 \rightarrow x = 4$

e

$log_2 x = -1 \rightarrow 2^{-1} = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2}$