Matrizes

Por Giovani Imperatrice

Conceitos Iniciais

Definição

Matrizes são tabelas que dispõe elementos em **linhas** e **colunas**.
Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Ordem (Tipos)

Chama-se de Ordem de uma matriz o número com ***m*** linhas e ***n*** colunas, dado por ***mxn.***
Ou seja:

A matriz **A** é de ordem **2x2** pois possui duas linhas e duas colunas.
Diz-se:

$$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Já a matriz **B** é de ordem **3x4** pois possui três linhas e quatro colunas.
Diz-se:

$$B_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Classificação

As matrizes podem ser classificadas em alguns tipos, são eles:

Matriz Unitária

Uma matriz é unitária quando possui apenas uma linha e uma coluna. **m** e **n** = 1.

$$C = [-7]$$

Matriz Linha

Uma matriz linha é formada por apenas uma linha e qualquer número de colunas.
m = 1.

$$D_{1\times 5} = (0 \quad 1 \quad -3 \quad 5 \quad 12)$$

Matriz Coluna

No caso da matriz coluna o número de linhas pode variar enquanto existe apenas uma coluna. **n** = 1.

$$E_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Retangular

Uma matriz retangular é formada por um número diferente de linhas e colunas. $m \neq n.$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}_{4\times 2}$$

Matriz Quadrada

A matriz quadrada é formada pelo mesmo número de linhas e colunas. **m** = **n**.

$$G_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Elementos de uma Matriz

Uma matriz, portanto, é um conjunto de elementos, cada um com sua respectiva linha e coluna. Sua representação geral se da por um conjunto de elementos **a** de índice subscrito referindo a sua posição em linhas e colunas.
Costuma-se escrever da seguinte maneira:

$$H_{3x3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Podemos referir a um elemento de uma matriz através desses elementos a_{ij}**.** Lembrando que **i** = **posição relativa às linhas** e **j** = **posição relativa às colunas**.
Ex:

Dada a matriz:

$$M_{5\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}; \; Resolva: \;\; 3\cdot a_{52} \; + 4\cdot a_{11} - 2\cdot a_{32}$$

Para solucionar a questão é preciso identificar os valores de a_{52}, a_{11} e $a_{23}.$

$a_{52} = 10,$ é o elemento da linha 5, coluna 2.
$a_{11} = 1,$ é o elemento de linha e coluna 1.
$a_{32} = \; 6,$ linha 3 e coluna 2.

Assim:
$3\cdot a_{52} \; + 4\cdot a_{11} - 2\cdot a_{23} \; = \; 3\cdot 10 + 4\cdot 1 - 2\cdot 6 = 22$

Matriz Quadrada e suas Diagonais

Diz-se que os elementos de i=j compõe a diagonal principal de uma matriz.

No caso da seguinte matriz de ordem 3:

$$M_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots \\ \dots & a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & a_{33} \end{pmatrix}$$

Existe a diagonal secundária, formada na direção oposta da principal:

$$M_{3\times 3} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & a_{13} \\ \dots & a_{22} & \dots \\ a_{31} & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Diz-se traço de uma matriz a soma dos elementos da diagonal principal.

Lei de Formação

A lei de formação de uma matriz nada mais é do que um conjunto de regras que define os valores constituintes de uma matriz.

Ex:

A matriz formada por $A_{2\times 2} = (a_{ij})$ se dá por:

$a_{ij} = 2i - 4j \quad \leftarrow$ Lei de Formação

Assim, temos:

1) $A_{2\times 2}$ é uma matriz quadrada de ordem 2.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

2)Para cada a_{ij} é preciso calcular seu respectivo valor de acordo com sua lei de formaçao:

$a_{11} = 2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = -2$

$a_{12} = 2 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = -6$

$a_{21} = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0$

$a_{22} = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 2 = -4$

3) Em seguida é preciso inserir os valores na matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

A lei de formação pode ser condicional, para isso utilizamos de um sistema de equações seguidas de suas condições de acontecimento.
Ex:

A matriz formada por $B = (b_{ij})_{3\times 3}\, se\, dá\, por$:

$$b_{ij} = \begin{cases} i+j & , se\, i = j \\ 0 & , se\ i \neq\ j \end{cases}$$

Assim temos:

1)$(b_{ij})_{3\times 3}$ é uma matriz quadrada de ordem 3.

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

2) Quando os valores de i e j respeitarem as condições do sistema b_{ij} utilizamos suas funções respectivas.

$a_{11} = i + j$, já que $i = j$; $a_{11} = 2$
$a_{12} = 0$, $já\, que\, i\ \neq j$; $a_{12} = 0$
$a_{13} = 0$, $já\, que\, i\ \neq j$; $a_{13} = 0$
$a_{21} = 0$, $já\, que\, i\ \neq j$; $a_{21} = 0$
$a_{22} = i + j$, já que $i = j$; $a_{22} = 4$
$\ldots$
$a_{33} = 6$.

3) inserindo os valores na matriz B , temos:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Transposta

A matriz transposta de M é formada invertendo as linhas e colunas da matriz M.
Ex:

Dada a matriz:

$$M_{2\times 3} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Sua transposta é obtida invertendo suas linhas por colunas.

$$M^T_{3\times 2} = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

ou seja:

$$M = (a_{ij})\, ;\, M^T = (a_{ji})$$

Simétrica

Quando uma matriz é quadrada (ou seja: m=n) e ao mesmo tempo sua transposta é igual à sua original diz-se que é uma matriz Simétrica.
Ex:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 9 \\ 5 & 9 & 3 \end{bmatrix} = M^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 9 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Antissimétrica

Quando uma matriz M é quadrada (m=n) e ao mesmo tempo sua transposta é igual à oposta de M, dada por -M, temos uma matriz antissimétrica.
Ex:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}; -M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{transpondo M temos:}$$

$$M^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{que é igual a } -M.$$

$$\text{Portanto, antissimétrica.}$$

Igualdade, Multiplicação por Escalar, Adição e Subtração

Igualdade

A igualdade nas matrizes ocorre quando dentro de matrizes de mesma ordem, seus elementos correspondentes forem iguais.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$a = a$$
$$b = b$$
$$c = c$$
$$d = d$$

Ex:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ c & 3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & 3d \end{pmatrix}$

$1 = a$
$2 = 2$
$c = 0$
$3 = 3d \rightarrow d = 1$

Multiplicação por Escalar

A multiplicação por escalar ocorre quando uma matriz é multiplicada por algum fator, como:

$$5 \cdot M$$

Nesse caso 5 é o escalar e M a matriz em questão.
Quando uma matriz é multiplicada por um escalar é preciso multiplicar todos os seus valores internos por este escalar.
Ex:

$$se:$$
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\text{então:}$$
$$-5 \cdot M = \begin{pmatrix} -5 \cdot 1 & -5 \cdot 2 \\ -5 \cdot 3 & -5 \cdot 4 \\ -5 \cdot 5 & -5 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -15 & -20 \\ -25 & -30 \end{pmatrix}$$

Adição e Subtração

As operações de soma e subtração em matrizes ocorre de maneira similar com a igualdade. As operações ocorrem com os respectivos elementos internos de matrizes de mesma ordem.

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ADIÇÃO:}$$
$$A + B =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 1+2 \\ 2+1 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$
$$SUBTRA\text{ÇÃ}O:$$
$$A - B$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 1-2 \\ 2-1 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicação

Para multiplicar duas matrizes é preciso que o número de colunas da primeira seja igual ao número de linhas da segunda. A matriz resultante possui o número de linhas da primeira e de colunas da segunda.

Atenção: Nesse caso, inverter a ordem dos fatores na multiplicação muda o resultado.

Considerando as matrizes A e B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \; e \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para ser possível multiplicá-las o número de colunas do primeiro fator deve ser igual ao de linhas do segundo.

$$A_{2\times3} \times B_{3\times2} \; = \; C_{2\times2}$$

O resultado C é uma matriz de ordem 2x2.

$$A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

O processo de multiplicação para cada elemento se dá pela soma das multiplicações das linha por colunas:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$a \cdot g + b \cdot i + c \cdot k = a_{11}$$
$$a \cdot h + b \cdot j + c \cdot l = a_{12}$$
$$d \cdot g + e \cdot i + f \cdot k = a_{21}$$
$$d \cdot h + e \cdot j + f \cdot l = a_{22}$$

:

No caso das matrizes A e B, temos:

$$A \times B = C$$
$$1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = a_{11} = 3$$
$$1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = a_{12} = 3$$
$$2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = a_{21} = 5$$
$$2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = a_{22} = 5$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Contanto que o número de colunas da primeira seja igual ao número de linhas da segunda é possível multiplicar matrizes:

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}; \; E = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$F = D \times E$$
$$F = (a_{11}) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 7$$
$$F = (41)$$

Matriz Identidade

A matriz identidade é formada por elementos 1 na diagonal principal e zeros no restante.

$$I = \begin{cases} 1 & , se\, i = j \\ 0 & , se\, i \neq j \end{cases}$$

$$I_{2\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \, ou \; I_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Inversa

Seja A uma matriz quadrada. Sua inversa, caso exista, será A^{-1} de mesma ordem, tal que:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$

Quando se multiplica uma matriz inversa pela sua original é obtida a Identidade desta matriz.
Ex:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \; A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$A \times A^{-1} = I$

$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1a + 4c & 1b + 4d \\ 2a + 3c & 2b + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$1a + 4c = 1$

$1b + 4d = 0 \; \to b = -4d$

$2a + 3c = 0 \; \to a = -\dfrac{3}{2}c$

$2b + 3d = 1$

Então:

$c: \; 4c - \dfrac{3}{2}c = 1 \to \dfrac{16-6}{4}c = 1 \to c = \dfrac{4}{10}$

$d: \; 2(-4d) + 3d = 1 \; \to \; -8d + 3d = 1 \to d = -\dfrac{1}{5}$

$a: \; a = -\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{4}{10}\right) = -\dfrac{12}{20} = -\dfrac{3}{5} \to a = -\dfrac{3}{5}$

$b: \; b = -4\left(-\dfrac{1}{5}\right) \to b = \dfrac{4}{5}$

$\text{Assim montamos a matriz Inversa :}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

Determinantes e Regra de Sarrus

Determinantes

Determinante é um número real associado a uma matriz quadrada. Geometricamente falando ele representa o fator de escalonamento de um espaço vetorial.

Ordem 1

A determinante neste caso é o próprio valor interno da matriz.

$A_{1\times1} = (3);\ \det(A) = 3$

Ordem 2

No caso da ordem 2 a determinante é calculada pela multiplicação dos elementos da diagonal principal menos o resultado da multiplicação da diagonal secundária.

$$B_{2\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix};\ \det(B) =\ (1\cdot -4) - (3\cdot 2) = -10$$

$$A_{2\times2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\ \det(A) = a\cdot d - b\cdot c$$

Ordem 3 (Regra de Sarrus)

Em matrizes de ordem 3 utiliza-se da mesma ideia das de ordem 2, porém neste caso também é aplicada a regra de Sarrus.

Para isso é preciso duplicar as primeiras duas colunas, adicionando-as à direita da matriz. Em seguida, todas as diagonais no sentido da principal são multiplicadas e somadas, subtraídas das somas das multiplicações de cada diagonal no sentido da secundária.

$$A_{3\times3} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times3} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$a\cdot e\cdot i + b\cdot f\cdot g + d\cdot d\cdot h$$

Aqui soma-se as multiplicações de cada diagonal no sentido principal.

$$A_{3\times3} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$c\cdot e\cdot g + a\cdot f\cdot h + b\cdot d\cdot i$$

Para concluir é preciso subtrair o resultado da diagonal principal com a diagonal secundária.

Teorema de Laplace

Quando se trata de matrizes de ordem maior do que três os cálculos se tornam mais trabalhosos e repetitivos. Para solucionar este tipo de matrizes é utilizado o teorema de Laplace. Para entender o teorema, primeiramente é preciso entender o que são menores complementares e cofatores.

Menor Complementar D_{ij}

O menor complementar de uma matriz é uma matriz formada pelos elementos complementares à linha e coluna de um determinado elemento. Considere por exemplo a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Vamos descobrir qual é o menor complementar para o elemento a_{22}. Para isso é preciso eliminar a linha e coluna deste elemento, no caso a linha 2 e a coluna 2.

$$A = \begin{pmatrix} a & \cancel{b} & c \\ \cancel{d} & \cancel{e} & \cancel{f} \\ g & \cancel{h} & i \end{pmatrix}$$

Construímos a matriz com os elementos restantes:

$$D_{22} = \begin{pmatrix} a & c \\ g & i \end{pmatrix}$$

Cofator C_{ij}

O cofator é o menor complementar adicionado de uma função para alterar o sinal de acordo com a posição do elemento selecionado.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Ex:

Calculando o cofator do menor complementar D_{22}

$C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot D_{ij}$

$C_{22} = -1^4 \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ g & i \end{pmatrix}$

$c_{22} = 1 \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ g & i \end{pmatrix}$

Agora que definimos os Menores Complementares e os Cofatores podemos aplicar o Teorema de Laplace.

Teorema de Laplace

Considerando a matriz de ordem 4 a seguir:

$$A_{4\times4} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1) Escolher uma linha ou coluna para trabalhar, dê preferência para a que possuir o maior número de elementos iguais a zero, isso facilita os cálculos.

$$A_{4\times4} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A determinante desta matriz será a soma de cada elemento da coluna selecionada acima multiplicado por seu cofator.

$$Det(A_{4\times4}) = 0 \cdot C_{13} + 1 \cdot C_{23} + 3 \cdot C_{33} + 0 \cdot C_{43}$$

Observe que para cada zero na coluna selecionada removemos um cálculo de cofator.

$$Det(A_{4\times4}) = 1 \cdot C_{23} + 3 \cdot C_{33}$$

2) Agora é só calcular os cofatores para os elementos restantes e obtemos a determinante desta matriz.

$$A_{4\times4} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Removemos a linha e coluna correspondente ao elemento de linha 2 e coluna 3 para encontrar o menor complementar.

Aplicamos a fórmula do cofator para definir o sinal desta matriz:

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow C_{23} = -\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Calculamos pela regra de Sarrus:

$$C_{23} = -Det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{matrix}$$

$$\searrow\searrow\searrow \ = (1 \cdot 0 \cdot 1) + (-2 \cdot 1 \cdot 3) + (0 \cdot -1 \cdot -2) = 0 - 6 + 0 = -6$$

$$\swarrow\swarrow\swarrow \ = (0 \cdot 0 \cdot 3) + (1 \cdot 1 \cdot -2) + (-2 \cdot -1 \cdot 1) = 0 - 2 + 2 = 0$$

$$\searrow\searrow\searrow - \swarrow\swarrow\swarrow \ = -6 - 0 = -6$$

$$C_{23} = -Det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -(-6) = 6$$

4) Repetindo o processo para o cofator C_{33} temos:

$$D_{33} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$C_{33} = (-1)^{3+3} \cdot D_{33}$$
$$C_{33} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$Det(C_{33}) = ((1 \cdot 1 \cdot 1) + (-2 \cdot 0 \cdot 3) + (0 \cdot 0 \cdot -2)) - ((0 \cdot 1 \cdot 3) + (1 \cdot 0 \cdot -2) + (-2 \cdot 0 \cdot 1$$
$$Det(C_{33}) = 1 - 0 = 1$$

5) Considerando os Cofatores Obtidos podemos trocá-los no cálculo:

$$Det(A_{4\times4}) = 1 \cdot C_{23} + 3 \cdot C_{33}$$

$$Det(A_{4\times4}) = 1 \cdot 6 + 3 \cdot 1$$
$$Det(A) = 9$$

A determinante da Matriz A é então igual a 9.

Determinante Propriedades

Filas Nulas

Toda vez que existir uma linha ou coluna inteiramente igual a zero a determinante da matriz é igual a zero.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 68 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 9 & 3 \end{bmatrix} = 0$$

Troca de Filas Paralelas

Toda vez que uma linha troca de lugar com outra linha ou uma coluna com outra coluna o sinal do determinante muda.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \det(A)\,; \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = -\det(A)$$

Multiplicação de uma Fila por um número real

Ao multiplicar uma fila inteira por um valor diferente de zero se obtém a determinante multiplicada por esse valor.

$$Det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = A$$

$$k \neq 0$$

$$\det\begin{pmatrix}1 & k & 1\\ 1 & k & 1\\ 1 & k & 1\end{pmatrix} = k \cdot A$$

Filas paralelas iguais (Proporcionais)

Se filas paralelas de uma matriz forem iguais ou proporcionais o determinante é zero.

$$\det\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & 10\end{pmatrix} = 1 \cdot 10 - 5 \cdot 2 = 10 - 10 = 0$$

Determinante da Transposta

O determinante de uma matriz M é igual a determinante de sua transposta.

$$Det\begin{pmatrix}1 & 0\\ z & 5\end{pmatrix} = Det\begin{pmatrix}1 & z\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

$$Det(A) = Det\left(A^T\right)$$

Teorema de Binet

O determinante do produto de duas matrizes é igual ao produto dos determinantes de duas matrizes.

$$Det(A \cdot B) = Det(A) \cdot Det(B)$$